

UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

La Resolución De Problemas Como Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De  
Los Productos Notables Haciendo Uso De Los Múltiples Registros De  
Representación Semiótica En Los Estudiantes Del Grado Octavo De La Institución  
Educativa Jaime Duque Grisales Del Municipio De Villamaría

Problem Solving as a Didactic Proposal for Teaching Remarkable Products Making use of  
Multiple Registries of Semiotic Representation in Eight Grade of the Educational Institution  
Jaime Duque Grisales of municipality Villamaría.

**Claudia Libreros Ocampo**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Manizales, Colombia

2017

La Resolución De Problemas Como Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De  
Los Productos Notables Haciendo Uso De Los Múltiples Registros De  
Representación Semiótica En Los Estudiantes Del Grado Octavo De La Institución  
Educativa Jaime Duque Grisales Del Municipio De Villamaría

**Claudia Libreros Ocampo**

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

**Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales**

Director:

Ph.D. Simeón Casanova Trujillo

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2017

## **Dedicatoria**

Dedico este trabajo muy especialmente a mi difunto padre Juan Manuel, quien desde muy niña me enseñó a afrontar la vida con decisión y verriquera.

A mi esposo por su apoyo incondicional, su paciencia y colaboración.

También dedico a mis hijos quienes han sido mi mayor motivación para nunca rendirme en mis estudios y poder ser un buen ejemplo para ellos.

A toda mi familia que es lo mejor y más valioso que Dios en su infinita gracia me ha dado.

Claudia L.

## **Agradecimientos**

El agradecimiento de mi tesis es principalmente a Dios quien me ha guiado y me ha dado la fortaleza, la entereza y el conocimiento necesario para afrontar este reto.

A mis profesores, por quienes he llegado a adquirir los elementos necesarios para poder desarrollar este trabajo de grado, gracias por su paciencia, dedicación y motivación.

A la Secretaría de educación departamental y en especial a la Gobernación de Caldas por el apoyo brindado al otorgarme la Beca para cualificar mi saber y poder formarme como Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

Muy especialmente agradezco a las directivas, profesores, personal administrativo, estudiantes del grado octavo 2 y padres de familia de la comunidad educativa JAIME DUQUE GRISALES, quienes con su apoyo incondicional permitieron realizar cantidad de pruebas, para poder llevar con éxito este trabajo de investigación.

Gracias a Luis, pues sin su valiosa colaboración, este trabajo hubiera sido mucho más largo, complicado, menos rico y animado, sin su buen criterio, su capacidad de entrega y ayuda.

Y como no agradecer la comprensión, paciencia y ánimo recibidos de mi esposo, mis hijos, mi madre y mis hermanas quienes me empujaron, me dieron alientos y brindaron su ayuda incondicional para sacar este proyecto adelante.

## Resumen

El objetivo del presente trabajo de investigación consistió en elaborar una propuesta didáctica por medio de la resolución de problemas y los múltiples registros de representación semiótica encaminada a mejorar los desempeños académicos de los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Jaime Duque Grisales en el tema de los productos notables, y para ello se hace uso de la teoría de los Múltiples Registros de Representación de Raymond Duval, al igual que la metodología para la Resolución de Problemas propuesta por George Polya

La metodología empleada fue de tipo cuasi-experimental siendo un tipo de diseño muy útil para medir variables no paramétricas. De esta manera, se utilizó la prueba de Wilcoxon para determinar diferencias significativas bilaterales ( $p < 0.001$ ) entre la hipótesis nula y la alternativa, y poder determinar si la propuesta didáctica inducía un incremento significativo de la mediana del grupo posttest en relación con la mediana del grupo pretest.

La muestra de estudio la conformó un grupo de 29 estudiantes de la zona urbana del municipio de Villamaría a los cuales se les enseñó con el uso de objetos virtuales de aprendizaje (OVA) favoreciendo la visualización, la conjetura y la comunicación de ideas matemáticas como elementos fundamentales de las competencias generales de matemáticas. Por otro lado, se emplearon dos guías de trabajo con el uso de GeoGebra y se utilizó un test de entrada y un test de salida que fueron posteriormente comparados con la prueba de Wilcoxon.

Conforme a los resultados se pudo concluir que un proceso de enseñanza - aprendizaje desde este enfoque didáctico deberá poseer los siguientes rasgos: el diseño de las guías de interaprendizaje con la utilización de los registros de representación semiótica y enfrentar al estudiante a la resolución de un problema hace que este utilice heurísticas nuevas y le crea una desacomodación cognitiva necesaria para reaprender o formar nuevas conceptualizaciones tanto mentales como reales.

**Palabras clave:** Productos notables, Registros de representación semiótica (RRS), Álgebra, Resolución de problemas

## Summary

The aim of this research was to elaborate a didactic proposal for the teaching of remarkable products through the resolution of problems and the multiple registers of semiotic representation. This proposal was aimed for improving the academic performance of the eighth grade students from the Jaime Duque Grisales' Educational Institution. In this work, the theory of the multiple representation registries by Raymond Duval was used as teaching strategies, as well as the methodology for problem solving proposed by George Polya.

The methodology used in this study was of the quasi-experimental nature, which is a very useful type of design to measure non-parametric variables. Thus, a Wilcoxon test was used to determine bilateral significant ( $p < 0.001$ ) differences between the null and alternative hypothesis, determining if the didactic proposal could induce a significant increase of the medians of the post-test group when compared to the pretest group.

The sample of the study was represented by a group of 29 students from the urban area of the municipality of Villamaría who were taught with the use of virtual learning objects (OVA), favoring the visualization, conjecture and communication of mathematical ideas as fundamental elements for the general competences of mathematics. On the other hand, two working guides were designed by using GeoGebra software. Furthermore, an entrance test and an exit test were used, which were later compared with the Wilcoxon test.

According to the results, it could be concluded that a teaching - learning process from this didactic approach should have the following features: the design of the inter - learning guides with the use of the semiotic representation registers and facing the student to solve a problem makes it use new heuristics and creates a cognitive discomfort necessary to relearn or form new conceptualizations both mental and real.

**Keywords:** Notable products, Semiotic recordings problems (RRS), Algebra, Problem solving



## Tabla de Contenidos

Capítulo 1 Planteamiento Del Problema .....	1
1.1 Definición del problema.....	1
1.2 Justificación.....	3
1.3 Objetivos .....	4
1.3.1 Objetivo general .....	4
1.3.2 Objetivos específicos .....	4
Capítulo 2 .....	6
2.1 Marco Legal .....	6
2.1.1 La Ley general de educación (Ley 115 de 1994) .....	6
2.1.2 Estándares básicos de competencias .....	7
2.3. Antecedentes .....	8
2.4 Marco Teórico .....	11
2.1 La Resolución de Problemas según George Polya.....	11
2.2 La teoría de los múltiples registros de representación semiótica de Raymond Duval ...	13
2.2.1 Clasificación de los diferentes tipos de representación.....	16
2.3 El lenguaje visual y el lenguaje algebraico .....	17
2.4 Los productos notables.....	20
Capítulo 3 Metodología.....	26
3.1 Tipo de Investigación .....	26
3.2.2. Población.....	26
3.2.2.1. Selección de la Muestra. ....	27
3.2.3. Fases .....	27

Capítulo 4 Análisis de los resultados .....	30
4.1 Análisis del pretest. ....	30
4.1.1 Gráfica de porcentajes del pretest y hallazgos .....	34
4.2 Análisis del posttest.....	35
4.3 Análisis y comparación del pretest y el posttest con el Test U de Wilcoxon .....	40
4.3.1 Tablas de resumen de cada estadígrafo .....	40
4.3.2 Hallazgos encontrados al aplicar el Test U de Wilcoxon .....	42
4.4 Análisis de las guías de interaprendizaje .....	44
4.3.1 Análisis de la Guía de interaprendizaje #1.....	44
4.3.1.1 Gráfica de porcentajes de la guía de interaprendizaje 1 y hallazgos.....	47
4.3.2 Análisis de la Guía de interaprendizaje # 2.....	48
4.3.1.2 Gráfica de porcentajes de la guía de interaprendizaje 2 y hallazgos.....	51
Capítulo 5 Conclusiones Y Recomendaciones .....	53
5.1. Conclusiones por objetivos específicos. ....	53
5.1.1 Objetivo específico # 1.....	53
5.1.2 Objetivo específico # 2.....	53
5.1.3 Objetivo específico # 3.....	54
5.1.4 Objetivo específico # 4.....	55
5.1.5 Objetivo general .....	56
5.2 Recomendaciones.....	58
Lista de referencias .....	59
Apéndice .....	62
Apéndice # 1 Pretest y posttest.....	62

Apéndice # 2. Guía # 1 .....	67
Apéndice # 3. Guía # 2.....	70
Apéndice # 4. Objetos virtuales de aprendizaje contruidos con GeoGebra .....	77
Apéndice # 5. Registros fotográficos .....	78

## Lista de tablas

Tabla 1. Fases de la Investigación .....	27
Tabla 2. Respuestas al cuestionario Pretest .....	30
Tabla 3. Respuestas al cuestionario del posttest .....	35
Tabla 4. Resumen de los resultados .....	40
Tabla 5. Estadígrafos .....	41
Tabla 6. Rango de niveles de desempeño .....	43
Tabla 7. Diferencias significativas estadísticas .....	44
Tabla 8. Respuestas a la guía de interaprendizaje 1.....	45
Tabla 9. Respuestas a la guía de interaprendizaje 2.....	49

## Lista de figuras

Ilustración 1. Esquema ideográfico.....	19
Ilustración 2. Esquema del lenguaje visual simbólicos .....	20
Ilustración 3. Producto de la suma de dos cuadrados .....	22
Ilustración 4. Producto del cuadrado de diferencia de dos cantidades .....	23
Ilustración 5. Multiplicación de binomios .....	23
Ilustración 6. Producto de la suma de un cubo .....	24
Ilustración 7. Gráfica del análisis del pretest .....	34
Ilustración 8. Gráfica análisis del postest .....	39
Ilustración 9. Comparación de las medianas del pretest vs postest .....	42
Ilustración 10. Resultados de la guía #1 .....	47
Ilustración 11. Resultados de la guía 2 .....	51

## **Capítulo 1**

### **Planteamiento Del Problema**

#### **1.1 Definición del problema**

En el diagnóstico realizado en la institución educativa Jaime Duque Grisales del municipio de Villamaría (Caldas), se detectaron las siguientes situaciones:

1. El área de matemáticas es la que posee el mayor índice de desempeño bajo.
2. Existe un marcado desinterés por el área de las matemáticas
3. los estudiantes no sienten motivación por el estudio, mucho menos por las matemáticas ya que las ven como una asignatura monótona y difícil de aprender

Esta situación se debe a diversas causas entre las que se consideran las siguientes:

1. La utilización de estrategias inadecuadas por parte de algunos docentes.
2. El desconocimiento por parte de los docentes de los saberes previos que tienen los alumnos o dificultades con las que llega el estudiante al grado siguiente.
3. El sistema de evaluación Institucional y todo lo relacionado con el currículo, la relación docente - estudiante, las tareas académicas y el contexto socio económico y cultural de la población estudiantil.

Esta problemática conlleva a la necesidad urgente de plantear alternativas que contribuyan a mejorar los procesos de enseñanza - aprendizaje, encaminadas al diseño de estrategias orientadas

hacia el logro de aprendizajes que permitan mejorar los desempeños de los estudiantes. Por lo que se hace necesario entonces implementar una estrategia diferente y no continuar con las temáticas de manera tradicional, como se ha venido haciendo hasta el momento. Se propone entonces para ello estas dos estrategias metodológicas dentro del aula:

1. *Proyectos de Aula*: Se requiere implementar nuevas prácticas de aula. En la Institución Educativa se cuenta con un Proyecto institucional denominado “Construyo mi futuro a través del Saber” que tiene como objetivo el mejorar los resultados de los estudiantes con relación a las pruebas externas. Estrategias como esta posibilitan nuevos escenarios para nuestros estudiantes.

2. *Proyectos Teóricos*: La población estudiantil con la que cuenta la Institución en este momento necesita nuevos escenarios en la enseñanza de las matemáticas que permita el mejoramiento de los resultados con relación a las pruebas externas, pero principalmente que se propicie el disfrute de las clases de matemáticas, la motivación y el interés del estudiante.

Con todo lo anterior esta es la pregunta a la que se le quiere dar solución:

*¿Qué características debe tener un proceso de enseñanza - aprendizaje que contribuya al aprendizaje de los productos notables, haciendo uso del método de resolución de problemas y los múltiples registros de representación semiótica con los estudiantes del grado octavo de la Institución educativa Jaime Duque Grisales del municipio de Villamaría – Caldas?*

## 1.2 Justificación

Al realizar el diagnóstico a los estudiantes del grado octavo de la institución educativa Jaime Duque Grisales, se detectó desmotivación y desinterés por el área de las matemáticas, encontrándose con estudiantes poco interesados por adquirir el conocimiento, se observó un porcentaje mínimo de estudiantes con deseos de aprender los conocimientos del área en este grado. Teniendo en cuenta que uno de los retos dentro del aula de clase es captar el interés de los estudiantes, lograr que sientan motivación para adquirir un nuevo conocimiento y que se cumpla el propósito planteado por el docente para la clase y que éste a su vez sea reflejado en un desempeño académico satisfactorio, se debe revisar las estrategias metodológicas aplicadas en el aula, conocer la población con la que se está trabajando, su contexto, sus gustos e intereses.

Al plantear la propuesta metodológica en la enseñanza de los productos notables basada en la resolución de problemas y haciendo uso de heurísticas semióticas (registros de representación), para los estudiantes del grado octavo de la institución educativa Jaime Duque Grisales, se pretende lograr un aprendizaje significativo, y despertar en los estudiantes el gusto y el interés por el álgebra y cambiar el paradigma de las matemáticas aburridas con la que ellos se han formado.

A partir de esta propuesta de investigación se beneficiarán a los estudiantes del grado octavo y en general los de la institución, pues se pretende que, al mejorar la práctica educativa, también se mejore los resultados en las pruebas SABER noveno y undécimo y sobre todo se mejore el escenario de las clases de matemáticas.

Esta propuesta surge a partir de un diagnóstico realizado en la Institución, en donde se detecta que el área de mayor pérdida es matemáticas, al encuestar a los estudiantes a cerca de los gustos



por las asignaturas vistas, se observa que una de las que menos les agrada es matemáticas y una de las razones es la forma cómo se enseña. Con esta propuesta se pretende revisar las estrategias metodológicas usadas y mejorar el escenario de las clases de matemáticas en los estudiantes con el propósito de que se sientan motivados y comprometidos con su aprendizaje, posibilitando así que sean capaces de asumir su responsabilidad con conocimiento claro de su misión, como es el de mejorar su rendimiento académico a medida que van avanzando en sus estudios.

### **1.3 Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivo general**

Elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de los productos notables a través de la resolución de problemas y los múltiples registros de representación semiótica encaminada a mejorar los desempeños académicos de los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Jaime Duque Grisales.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

1. Diagnosticar el nivel de conocimientos que poseen los estudiantes de grado octavo de la institución Educativa Jaime Duque Grisales sobre el conocimiento algebraico de los productos notables.

2. Diseñar una propuesta didáctica basada en la resolución de problemas haciendo uso de los registros de representación semiótica para la comprensión de los productos notables de manera significativa.

3. Mejorar los desempeños de los estudiantes implementando la nueva estrategia didáctica sobre la enseñanza de los productos notables a partir de la resolución de problemas y los múltiples registros de representación semiótica.

4. Evaluar el impacto de la estrategia didáctica y su incidencia en el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes.

## **Capítulo 2**

### **Marco Teórico**

#### **2.1 Marco Legal**

A continuación, se hace referencia sobre algunas normas generales que tratan sobre la importancia de formar sujetos críticos, reflexivos y que resolver problemas en contexto tanto de forma particular como aplicada a la sociedad.

##### **2.1.1 La Ley general de educación (Ley 115 de 1994)**

En el artículo 5° de la Ley General de Educación de Colombia (MEN,1994) se nombran los fines de la educación: De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, la educación se desarrollará atendiendo a varios fines en especial el inciso #9 cita: “El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país”(pp. 1-2 ).

En la sección Tercera de la misma ley en su artículo # 20, inciso c, dice: “Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana” (p.6).

En el artículo # 22 en el apartado sobre los objetivos de la educación básica en el ciclo de secundaria en el inciso c dice. “El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana (p.7).

Lo anterior describe el interés de las políticas gubernamentales para fomentar el desarrollo de competencias matemáticas sobre todo el de la resolución de problemas, el pensamiento crítico y el razonamiento lógico como pilares fundamentales para la solución de problemas cotidianos de la ciencia y la tecnología.

### **2.1.2 Estándares básicos de competencias**

En el año 2006 se publican los estándares básicos de competencia para el área de matemáticas (MEN, 2006) en los cuales se hablan sobre “algunos procesos generales presentes en toda la actividad matemática que explicitan lo que significa ser matemáticamente competente” (p.50), entre los cuales destacaremos dos de ellos fundamentalmente que son los procesos sobre los cuales se fundamenta este trabajo:

1. Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones

semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas.

2. Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir, dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos (p.51)

### **2.3. Antecedentes**

Para dar comienzo al estado de arte sobre la enseñanza de los productos notables citaré el trabajo titulado *“Dinamización Matemática: Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática”* de Julio Cesar Barreto García (Barreto García, 2014), en el que el autor propone “la deducción geométrica de los productos notables que se construyen y se visualizan en el espacio tridimensional, los cuales generan un volumen por la integración o la suma de diversas áreas de figuras geométricas planas, formando un sólido en el espacio. Esto se realiza partiendo de conceptos y proposiciones de la geometría plana, en donde se parten de figuras

geométricas básicas como son algunos polígonos regulares o irregulares. Dentro de estos productos notables se deduce el cuadrinomio cubo perfecto que se genera del cubo de una suma y de una diferencia de un binomio, además de la deducción geométrica de los productos notables que generan la suma y la diferencia de cubos” (pp. 115 – 133).

Para continuar con los antecedentes se nombrará el trabajo de grado para optar a Magister en docencia de la matemática de la Lic. Myrian Susana Valencia Cárdenas titulada “Aplicación de la estrategia didáctica de organizadores gráficos en el aprendizaje de productos notables y factorización de los estudiantes del noveno año de educación general básica del colegio nacional Veracruz del cantón Pastaza” ( Valencia Cárdenas, 2012) realizada en la ciudad de Ambato (Ecuador), la autora hace referencia a una investigación de corte documental y de campo, encaminada a la mejora de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas. Se destaca como punto importante la triada o triángulo didáctico propuesta por Chevallard “alumno-saber – profesor” ya que aprendizaje de las matemáticas no radica solo en enseñar procesos, sino en todo sistema didáctico formado por el alumno, el profesor y el conocimiento. La autora expone además un problema de investigación que se genera a partir de la siguiente pregunta ¿Por qué a los alumnos se les dificulta comprender el tema de factorización y los productos notables? Para dar respuesta a la pregunta de realizó una secuencia de clase, apoyada en los organizadores gráficos, donde el alumno pueda transitar por situaciones problema, que le den la oportunidad de cuestionar en función de mejorar y efectivizar sus conocimientos. El trabajo se realizó en una institución educativa de Ambato a un grupo de 72 de estudiantes de grado 9°. La conclusión general fue la siguiente: **Se ha verificado que los docentes de la Institución analizada no**

**utilizan organizadores gráficos para enseñar factorización y productos notables a los estudiantes, sino más bien continúan con el método de explicación en la pizarra.**

Otro antecedente muy importante es el trabajo de grado titulado *“Aplicación de la metodología de resolución de problemas para el aprendizaje de los productos notables, en los estudiantes de noveno año de educación básica, de la unidad educativa “Nación Puruha” en la Comunidad Galte, Provincia de Chimborazo, durante el año lectivo 2015-2016”* (Guzñay, 2016) realizado por Juan Milton Guzñay. El autor dice que su trabajo se origina de un problema que existen en el aprendizaje de productos notables, sobre todo en la dificultad que existe al no encontrar un metodología para resolverlos, es donde propone como alternativa la metodología de la resolución de problemas por lo tanto su estudio se sustenta en dicha Metodología, la cual ayuda a comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan, examinar la solución obtenida y desarrollar de mejor manera su comprensión, interpretación y resolución de problemas. Como autores de su trabajo propone las teorías de Piaget, Ausubel, Novak, y Vygotsky a través de dos variables, una variable independiente la metodología de Resolución de Problemas y la variable dependiente el aprendizaje de Productos Notables. El método que se empleó fue el Método Inductivo Deductivo, ya que este es un proceso racional, sistemático y lógico.

## 2.4 Marco Teórico

### 2.1 La Resolución de Problemas según George Polya

En 1945 George Polya publica el libro *How to solve it* que fue la primera edición en inglés. El título traducido al español es “Cómo plantear y resolver problemas” en su primera edición en español que fue traducido 20 años después, la versión que se citará es la de la editorial Trillas de México y los apartes generales de la Revista SUMA # 22 del año 1996. (Corbalán & Deulofeu, 1996).

En los años 80 la NCTM<sup>1</sup> gesta el movimiento para la enseñanza de la matemática con el boom de metodología de la resolución de problemas (De ahora en adelante se nombrará como RP), esta ola se populariza aún más con los trabajos de Alan Schoenfeld quien fuera discípulo de Polya, gestándose así todo un movimiento mundial y generando cambios en los currículos de muchos países.

---

<sup>1</sup> *National Council of Teachers of Mathematics Consejo Nacional de profesores de matemáticas de Estados Unidos*



El fenómeno Polya se fue institucionalizando primero en las universidades para pasar luego a la educación matemática escolar y generar en los gobiernos cambios sustanciales en los procesos de enseñanza de las matemáticas y otras ciencias duras.

El libro de Polya (Corbalán & Deulofeu, 1996) “constituye el primer intento de la puesta a punto de la heurística moderna que, según su propia definición, trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en este proceso (...)” (p. 104). Según Polya la heurística *ars inveniendi* es el arte de resolver problemas. “La Heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Polya (1965) citado por (Boscan Mieles & Klever Montero, 2012). Polya da una serie de pasos que describe en su libro para la RP así:

- I. Comprender el problema
- II. Concebir un plan
- III. Ejecución del plan
- IV. Examinar la solución obtenida.

Cada uno de estos pasos tiene además otras subdivisiones y preguntas “heurísticas” que hacerse para la RP. (Corbalán & Deulofeu, 1996).

A continuación, se tratarán las cuatro Fases y sus implicaciones en la RP.

1. Comprender el problema: “es la fase del cuestionamiento y de la identificación de datos e incógnitas. Entender el problema, según Polya, es apropiárselo; concretarlo en tan pocas palabras

que pueda ser reformulado de manera distinta sin modificar la idea. Por supuesto, para lograrlo es necesario aprehender su enunciado verbal” (Boscan Mieles & Klever Montero, 2012, p.12, a).

2. Concebir un plan: en esta fase el docente debe guiar al estudiante para la concepción de un plan, pero sin imponérselo (Boscan Mieles & Klever Montero, 2012, p.12, b).

3. Ejecución del plan: “corresponde a la elaboración del proceso creativo; es importante que se vaya verificando cada paso que se ejecute del plan, examinar a cabalidad que cada pieza encaje perfectamente; la veracidad de todo razonamiento; la claridad de toda operación” (Boscan Mieles & Klever Montero, 2012, p.12, c).

4. Examinar la solución obtenida: “es una visión retrospectiva en donde se tiene que reconsiderar la solución, así como el procedimiento que llevó a ésta; esta fase ayuda a que el estudiante consolide sus conocimientos y desarrolle sus aptitudes para resolver problemas” (Boscan Mieles & Klever Montero, 2012, p.12, d).

## **2.2 La teoría de los múltiples registros de representación semiótica de Raymond Duval**

El empleo de diferentes representaciones para afrontar un problema, facilita en gran parte su comprensión y por ende lleva a darle una solución. Cuando un sujeto hace uso de diferentes representaciones para dar solución a un problema está utilizando todos los mecanismos heurísticos.

Todavía en nuestro contexto se presenta enfrentamientos entre los docentes que requieren solo un método de solución , dando énfasis al procedimiento algebraico y en pocas ocasiones se utilizan las diferentes representaciones que a la larga facilitan el entendimiento del problema, esto conlleva a coartar el razonamiento de los estudiantes para afrontar los problemas desde diferentes puntos de vista y con mayor riesgo en estudiantes que inician su secundaria, por lo cual se hace necesario trabajar en el aula actividades en las que se utilicen las diferentes representaciones para solucionar un problema, cuando los alumnos se ven afrontados a problemas que los motivan, exploran diferentes representaciones, manipulándolas y desarrollando ideas valiosas. (Loaiza , 2017)

En el año 1998 Duval escribió la versión francesa de su libro *Sémiosis et pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, para efectos de esta investigación se citará la versión traducida por Myriam Vega Restrepo de la Universidad del Valle en el año de 1999 titulada *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Duval, 1999)

Duval hace una introducción muy importante partiendo de una pregunta problematizadora ¿Qué papel juega la semiótica en los aprendizajes escolares?, a la cual responde de dos maneras, la primera es que no puede existir comprensión si no se distingue un objeto de su representación y la

segunda es que todas las representaciones semióticas están subordinadas a las representaciones mentales y que sólo cumplen funciones comunicativas.

Duval (1998) argumenta “Que no puede haber semiósis<sup>2</sup> sin noesis<sup>3</sup>” (p.15). Es así como el progreso de los conocimientos va acompañado de la creación y el desarrollo de sistemas semióticos, por ende, es la semiósis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis. (p.15)

Los sistemas semióticos, en efecto, deben permitir cumplir tres actividades cognitivas inherentes a toda representación:

1. Construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
2. Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
3. Convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. (Duval, 1999, p. 28)

---

<sup>2</sup> Semiósis es la aprehensión o la producción de una representación semiótica

<sup>3</sup> Noesis son los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto.

Define entonces a los registros de representación semiótica de ahora en adelante RRS como “los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente para comunicarlas” (Duval, 1999, p. 29)

### **2.2.1 Clasificación de los diferentes tipos de representación**

Duval cita en su texto a autores clásicos como Le Ny (1985), Paivo (1986), Larkin & Simon (1987) como el punto de partida para el poder caracterizar los tipos de representación tanto desde el campo filosófico como cognitivo, denominándolas con la misma intención de los autores, pero ampliándolas al campo de la función de objetivación, para él existen dos tipos de representaciones las conscientes cuyo papel fundamental es la significación de los objetos que pueden ser observados por un sujeto. En efecto es a través de la significación que se hace aprehensión perceptiva o conceptual de un objeto (Duval, 1999, p. 32). Las otras representaciones son las externas que cumplen la función de comunicación, pero a su vez cumplen otras dos funciones cognitivas: La de objetivación como toda representación consciente y la función de tratamiento. (Duval, 1999, p. 33). Toda representación semiótica es a la vez consciente y externa permitiendo una mirada del objeto, pero a su vez cumplen funciones de tratamiento necesarias en las que juegan un papel preponderante otras representaciones que fungan de carácter interno o exteno, o de manera consciente o inconsciente. Tal es el caso de las representaciones mentales y las computacionales. Las mentales son las que permiten mirar el objeto en ausencia total del significante perceptible lo que podríamos llamar “imágenes mentales” y son equivalentes a las semióticas conscientes (interna) . Las computacionales son aquellas cuyos significantes no

requieren de la mirada al objeto y su transformación es algorítmica de una serie de significantes en otra serie se les considera no conscientes y son de carácter interno.

A manera de cierre la teoría de Duval afirma que existen tres actividades cognitivas fundamentales de los RRS ligados a la semiosis, ellos son:

1. La formación representaciones en un registro semiótico particular bien sea para expresar una representación mental o bien sea para evocar un objeto real.
2. El tratamiento que es cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro.
3. La conversión que es cuando la transformación produce una representación en un registro diferente al inicial (Duval, 1999, p. 40)

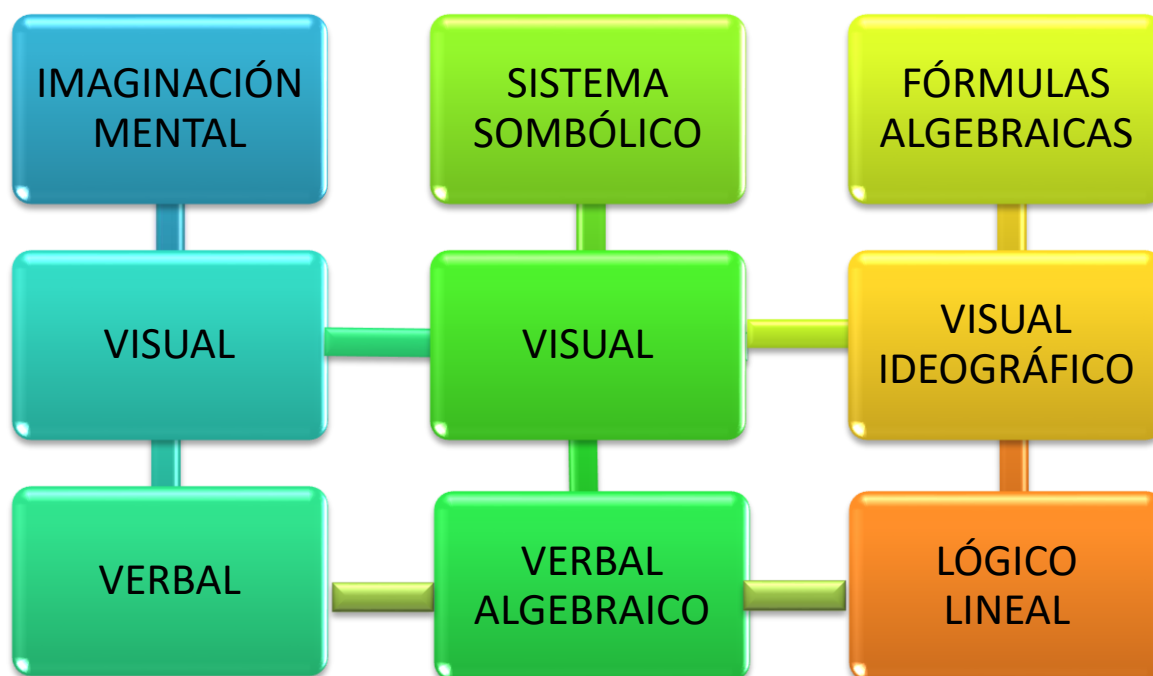
### **2.3 El lenguaje visual y el lenguaje algebraico**

En el libro *“Iniciación al álgebra”* (Socas R, Camacho M, Palarea M, & Hernández D, 1996) en el capítulo 5 se hace el análisis entre el lenguaje visual y el lenguaje algebraico y para ello plantea la teoría de los hemisferios cerebrales relacionada con la representación espacial y el lenguaje y hace referencia a cómo otros autores manifiestan que ambos hemisferios representan procesos mentales diferentes; para ellos el hemisferio izquierdo soporta el pensamiento abstracto, analítico y lógico asociado a funciones lingüísticas y el hemisferio derecho corresponde al pensamiento concreto, global, intuitivo relacionado con los procesos espaciales. Este análisis permite comprender que algunos estudiantes avanzan por un proceso individual guiado por procesos espaciales para llegar al conocimiento matemático, mientras que otros necesitan de un trabajo más analítico y menos intuitivo. En las matemáticas podemos identificar dos aspectos

esenciales, el lenguaje y los símbolos y la representación espacial y deben ser complementarios, por lo que se hace necesario el uso de múltiples actividades que apunten a avanzar en el conocimiento teniendo en cuenta las características referenciadas.

“Skemp señala en su libro “Psicología del aprendizaje de las Matemáticas”, citado por Socas & otros, que la imaginación mental de las personas puede clasificarse en dos tipos: visual y verbal (Socas R, Camacho M, Palarea M, & Hernández D, 1996, p. 141) y refiere que lo verbal es la representación de la palabra oral y escrita, mientras que lo visual hace referencia a diagramas de distintas clases. Se debe entonces tener en cuenta que el lenguaje algebraico presenta simbolización verbal, más que la visual; por lo que con este trabajo de investigación se propone la combinación entre lo visual y lo verbal con el fin de lograr aprendizajes significativos a cerca de los productos notables; pues la visualización es una herramienta importante que ayuda a la correcta comprensión de procesos algebraicos. La propuesta de investigación posibilita la modelación de procesos que enlacen lo visual y lo verbal, con el fin de poder llegar a una adecuada comprensión y por qué no a un proceso de generalización.

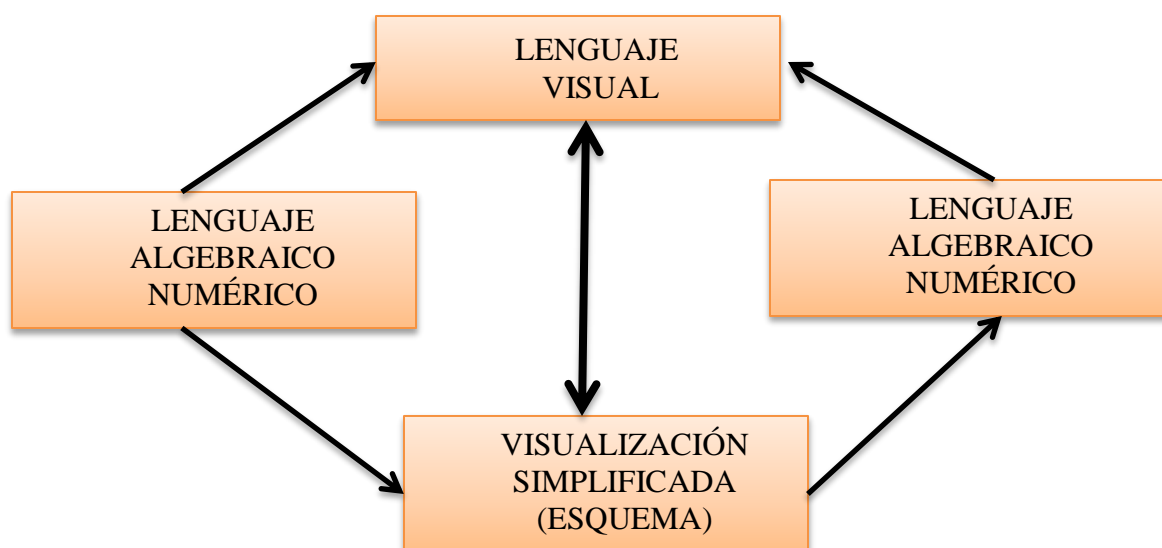
Todo esto nos lleva a establecer mecanismos en donde se potencie la imaginación, los sistemas simbólicos y las fórmulas algebraicas, apoyados en planteamientos geométricos usados por los griegos, para quienes no existía el álgebra, sino que se apoyaban en lo visual - ideográfico, que se presenta el siguiente esquema.



*Ilustración 1. Esquema ideográfico*  
*Fuente: Libro Iniciación al álgebra de Socas et al. P. 143*

Se potencia entonces el uso del lenguaje visual como herramienta didáctica de apoyo al lenguaje algebraico, llegando así a las múltiples representaciones semióticas propuestas por Duval que si se llevan al aula puede potenciar mejor el conocimiento matemático. El uso del lenguaje visual usado como recurso didáctico en el lenguaje algebraico y como recurso de apoyo para el desarrollo de cada actividad algebraica visualizado en el siguiente esquema





*Ilustración 2. Esquema del lenguaje visual simbólicos*

*Fuente: Libro Iniciación al álgebra de Socas et al. P. 144*

Se propone además una serie de secuencias didácticas en donde se hace uso de los diferentes tipos de lenguaje con el fin de lograr una mayor comprensión siguiendo el esquema anterior, además con las secuencias didácticas propuestas en el libro “*Iniciación al álgebra*” (Socas R, Camacho M, Palarea M, & Hernández D, 1996); se puede llegar con los estudiantes a procesos de generalización.

## 2.4 Los productos notables

A través de la historia del proceso de enseñanza de las matemáticas en el grado octavo se ha evidenciado un cambio significativo con relación a lo que se venía enseñando, pues se llega a la introducción de lenguaje formal o simbólico a partir de la sustitución de números por letras, constituyendo así el paso de la aritmética al álgebra lo que implica un nuevo aprendizaje para los

estudiantes y un reto para los docentes a fin de lograr aprendizajes significativos. El álgebra podría considerarse una extensión de la aritmética que supone un cambio metodológico.

Una de las aplicaciones del álgebra reside en la solución de problemas que incluyen situaciones de variación como se visualiza en los productos notables. “Se llama productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir sin verificar la multiplicación” (Baldor, 1941)

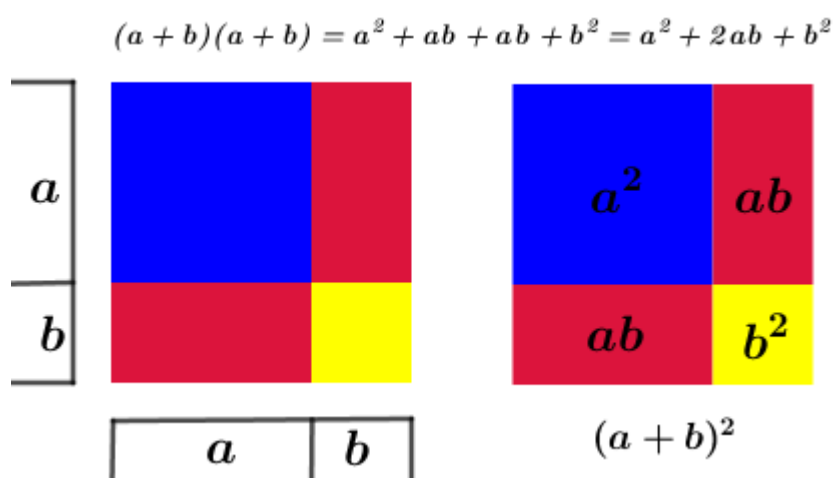
De esta forma se han trabajado los productos notables más comunes, siguiendo un algoritmo, haciendo uso de la memoria; lo que ha llevado a la apatía por gran número de estudiantes a este tipo de estrategias metodológicas, así.

Suma de un binomio al cuadrado  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Este producto refiere que el cuadrado de la suma de  $a$  y  $b$  es igual al cuadrado de " $a$ " más dos veces " $a$ " multiplicado por " $b$ " más el cuadrado de " $b$ ". Se puede comprobar reemplazando por valores numéricos.

$$\begin{aligned} ((2 + 3)^2 &= 2^2 + 2 \times 2 \times 3 + 3^2 \\ &= 4 + 12 + 9 = 25 \end{aligned}$$

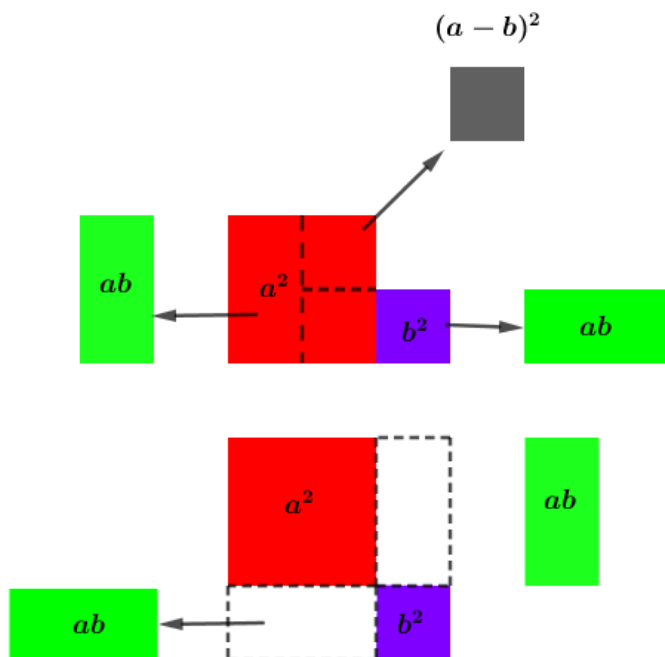
En (Barreto G, 2008b, 2009a, 2009b, p.61) se dedujo el producto notable que se obtiene de la factorización del cuadrado de la suma de dos cantidades, el cual puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos usando los siguientes pasos: Se construyen dos cuadrados, uno de " $a$ " unidades de lado y otro de " $b$ " unidades de lado, además de dos rectángulos congruentes que tengan de largo " $a$ " y ancho " $b$ " unidades, como veremos en la siguiente figura



*Ilustración 3. Producto de la suma de dos cuadrados*  
*Fuente: Construcción propia*

Con este tipo de representaciones se posibilita un aprendizaje significativo, pues se pasa de una representación visual a una discursiva; permitiendo llegar al proceso de generalización de los productos notables.

Igualmente se puede apreciar de manera geométrica el cuadrado de la diferencia de dos cantidades, usando los cuadrados rojos y azul, junto a los rectángulos verdes, así:



*Ilustración 4. Producto del cuadrado de diferencia de dos cantidades*

*Fuente: Construcción propia*

De igual manera se puede trabajar también el producto notable multiplicación de binomios con un término en común, aplicando el mismo procedimiento

	$x$	$a$	
$x$	$x^2$	$ax$	$x$
$b$	$bx$	$ab$	$b$
	$x$	$a$	

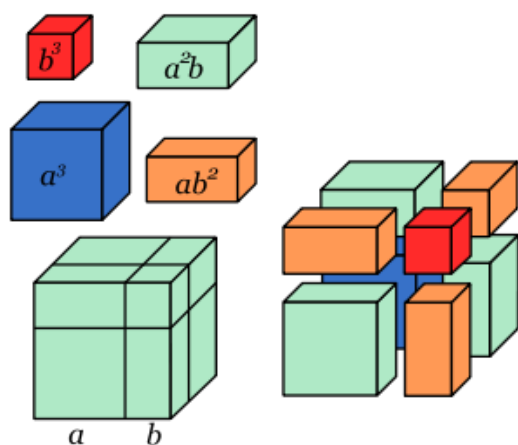
$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

$$x^2 + (a + b)x + ab$$

*Ilustración 5. Multiplicación de binomios*

*Fuente: Construcción propia*

Se debe tener en cuenta que en este tipo de productos se visualizan en el plano en dos dimensiones, pues si se usa la potencia al cubo se cuenta con el espacio tridimensional, indicando así que pasaremos de áreas a volúmenes de sólidos, lo que potencia la geometría espacial, adentrándonos al estudio de las figuras geométricas que ocupan un lugar en el espacio, y permite afianzar las proposiciones de la geometría plana, siendo base importante de otras ramas de las matemáticas como la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio entre otras.



*Ilustración 6. Producto de la suma de un cubo*  
*Fuente: <https://goo.gl/Z9FWKt>*

En el desarrollo del producto notable  $(a + b)^3$  se puede apreciar la descomposición geométrica de un volumen de un cubo a partir de la Construcción de cubos y paralelepípedos. Para su desarrollo se construyen 3 paralelepípedos cuya área de la base sea igual a " $ab$ " y su altura igual a " $a$ " y así mismo se construye otros tres paralelepípedos cuya área de la base sea igual a " $ab$ " y su altura " $b$ ", así como se aprecia en la figura anterior; por lo que su volumen será igual a  $a^2b$  y  $ab^2$  respectivamente. Se puede realizar entonces la deducción que el volumen es igual a  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .

Se puede entonces construir el concepto a partir de las deducciones hechas con las construcciones y lograr aproximaciones a conceptos de generalización.

En los estándares básicos de competencias propuestos por el MEN en donde se contempla que “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos”; se hace necesario motivar en los estudiantes un aprendizaje significativo a partir del planteamiento y solución de situaciones problema cotidianas.

Es así como se plantea una propuesta metodológica encaminada a la resolución de problemas que posibiliten un aprendizaje significativo de los productos notables haciendo uso adecuado de las herramientas tecnológicas y así el álgebra tenga sentido para los estudiantes.

## Capítulo 3

### Metodología

#### 3.1 Tipo de Investigación

El Método empleado en este trabajo de investigación es el **Inductivo** pues parte de un fenómeno particular en este caso la enseñanza de los productos notables para llegar a lo general que se verá reflejado en el análisis de los resultados. El tipo de investigación es **Descriptiva** ya que narra características y propiedades del objeto de estudio sin emplear ningún juicio de valor. El enfoque es **Cuasiexperimental**, este tipo de diseño es una forma de “investigación experimental ampliamente usada en las ciencias sociales siendo muy útil para medir variables sociales consiste en la escogencia de los grupos, en los que se prueba una variable, sin ningún tipo de selección aleatoria o proceso de pre-selección. Después de esta selección, el experimento procede de manera muy similar a cualquier otro, con una variable que se compara entre grupos diferentes o durante un período de tiempo” (Explorable, 2017, párr 3 - 5).

#### 3.2.2. Población

En la actualidad la institución cuenta con 450 estudiantes aproximadamente, de los cuales 280 pertenecen a la básica secundaria y media, del total de estudiantes el 43% son estudiantes con capacidades diversas en poblaciones vulnerables con diagnostico referidos a lo cognitivo, visual, auditivo, conductuales entre otros.

### 3.2.2.1. Selección de la Muestra.

El presente trabajo se desarrollará en la Institución Educativa Jaime Duque Grisales.

Los estudiantes que participaron en el trabajo de grado son los alumnos del grupo de octavo dos (8.2), integrado por 30 estudiantes, de los cuales 11 son mujeres (37%) y 19 hombres (63%), con edades que oscilan entre los 14 y los 18 años, la edad más representativa es 15 años, como se puede percibir en esta aula hay extra edad debido a las dificultades cognitivas, psicosociales y de aprendizaje que presentan los estudiantes.

### 3.2.3. Fases

Tabla

1.

*Fases de la Investigación*

<i>FASES</i>	<i>DESCRIPCIÓN DE LAS ACCIONES</i>
<b>Encuesta diagnóstica</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diseño de la encuesta</li> <li>• Aplicación y pilotaje a grupo diferente</li> <li>• Realización de ajustes y rediseño</li> <li>• Análisis de la encuesta</li> </ul>
<b>Aplicación de la encuesta diagnóstico</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicación de la encuesta al grupo experimental</li> <li>• Análisis de los resultados.</li> </ul>
<b>Diseño de las hojas de trabajo</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diseño y aplicación de las guías de interaprendizaje acordes con los resultados obtenidos para mejorar las deficiencias manifestadas</li> </ul>
<b>Revisión y aplicación de las hojas de trabajo</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisión de las hojas de trabajo por parte de los pares académicos antes de aplicarlas al grupo experimental</li> </ul>



---

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicación de las hojas de trabajo y evaluación de salida al grupo experimental</li> <li>• Realización de encuestas a los estudiantes</li> <li>• Organización y análisis de los datos obtenidos de las hojas de trabajo y evaluación de salida.</li> </ul>
<b>Recolección de datos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encuestas y/o entrevistas al grupo experimental</li> <li>• Registros fotográficos</li> <li>• Se realizará de dos formas:  <u>Cuantitativo:</u> Porcentajes y tablas estadísticas de la información</li> <li>• <u>Cualitativo:</u> Análisis de las categorías, información que dan los estudiantes de manera escrita o verbal</li> </ul>
<b>Análisis de los resultados</b>	

---

*Fuente: Construcción propia*

Para hacer el análisis cuantitativo se empleó el Test U de Wilcoxon, Este test debido a Mann y Whitney (1947) y basado en el Wilcoxon para muestras independientes es en cierto modo el equivalente no paramétrico del test t para la comparación de medias de dos distribuciones. Es seguramente una de las pruebas más potentes de entre las no paramétricas. La aplicación de la prueba exige que los datos de ambas muestras vengan medidos, al menos en escala ordinal, y su correcta ejecución requiere que las distribuciones muestrales tengan la misma forma (asimetría y curtosis).

En estas circunstancias, para contrastar si el comportamiento de ambas poblaciones es semejante se contrasta la hipótesis nula de que "la probabilidad de que una observación aleatoria

de la primera población supere a una observación aleatoria de la segunda población es 0.5" frente a la alternativa de que esta probabilidad es distinta a 0.5, pudiéndose plantear bilateral o unilateralmente (Universitat de Valencia, s.f., párr 1).

## Capítulo 4

### Análisis de los resultados

#### 4.1 Análisis del pretest.

El análisis del pretest se realizó teniendo en cuenta los niveles de desempeño propuestos por el MEN en la Guía 1290 (MEN, 2009), para cada uno se diseña un criterio de visualización de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba exploratoria así:

1. BAJO: El estudiante no tiene idea del ítem por el cual se le está indagando
2. BÁSICO: El estudiante maneja el concepto, pero de manera vaga, con poca claridad
3. ALTO: El estudiante tiene ideas claras a cerca de la situación que se le propone.
4. SUPERIOR. Además de tener una idea clara a cerca de lo indagado, lo expresa con suficiente claridad y propone otras estrategias.

*Tabla 2.*  
*Respuestas al cuestionario Pretest*

PREGUNTA	VALORACIÓN				TOTAL
	1 BAJO	2 BASICO	3 ALTO	4 SUPERIOR	
1. ¿Sabes qué es un producto? Explica	12	11	6	0	29
2. ¿En el área de matemáticas te han presentado situaciones problema para darle solución? En caso de que tu respuesta sea	15	9	5	0	29

---

afirmativa, describe ¿qué pasos sigues para darle solución?					
3. ¿Has oído hablar de productos notables? ¿Cómo lo entiendes?	11	15	3	0	29
4. ¿Cuál es el error que se cometió en el siguiente ejercicio?	27	0	2	0	29
$(7a^2 b^2 c)(-4a - 8b) =$ $-28a^2 b^2 c - 56 a^2 b^2 c$					
A) Se aplica mal la propiedad del producto de potencias de igual base					
B) Se aplica mal la propiedad de la potencia de una potencia					
C) Se aplica mal la propiedad de la potencia de un producto					
D) Se aplica mal el producto de los coeficientes					
5. Se denomina expresión algebraica a toda cantidad o conjunto de cantidades representadas por:	8	0	21	0	29
A) letras solamente sumadas entre sí					

---

---

B) números solamente sumadas y restados entre sí

C) letras y números ligados entre sí, por los signos de las diferentes operaciones

D) letras y números multiplicados entre sí

6. Describe cómo hallarías el área del cuadrado de lado $(2x + 3)$	16	<b>7</b>	6	0	29
--	----	----------	---	---	----

7. Encuentra el área de una puerta cuyas dimensiones son:	23	6	0	0	29
---	----	---	---	---	----

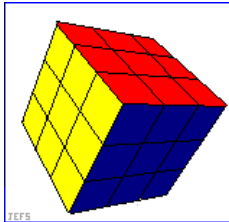
$$(2x + 10)(2x - 4) =$$

8. Describe con tus propias palabras cómo hallarías el área del cuadrado mayor.	17	12	0	0	29
---	----	----	---	---	----

9. Escribe la expresión que corresponde al área sombreada con todos los productos.	18	11	0	0	29
--	----	----	---	---	----

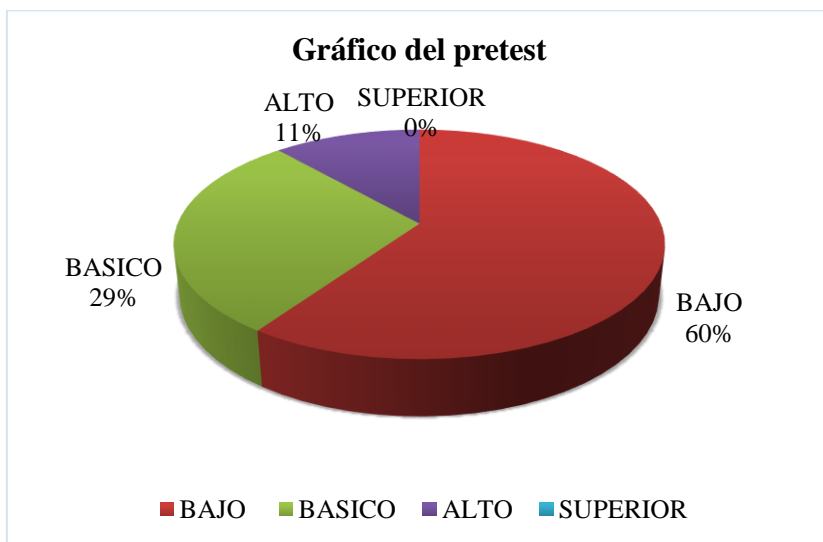
10. Se quiere determinar el área del siguiente terreno. Escribe una expresión algebraica que permita encontrarla	18	11	0	0	29
--	----	----	---	---	----

---

11. Describe con tus propias palabras ¿cómo hallarías el volumen de la figura si se conoce el área de cada parte de ella?	16	13	0	0	29
12. Cómo puedes representar la expresión $(12xy)^3$	24	5	0	0	29
13. Realiza los siguientes productos:	18	9	2	0	29
a. $(x + 3)(x - 2) =$					
b. $(b^3 + 9)(b^3 - 2) =$					
c. $\left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{3y}\right)^3 =$					
d. $(m^3 - 2n)^2 =$					
14. Encuentra una expresión que corresponda al volumen del siguiente cubo	19	8	2	0	29
 $a + 1$					
$a + 1$					
TOTAL GENERAL	242	117	47	0	406

Fuente: Construcción propia

#### 4.1.1 Gráfica de porcentajes del pretest y hallazgos



*Ilustración 7. Gráfica del análisis del pretest*  
*Fuente: Construcción propia*

#### Hallazgos:

Del total de las respuestas dadas por los estudiantes del pretest, el 59,6% se encuentran en el nivel 1 (Bajo), lo que indica este porcentaje es que este grupo de estudiantes no conocen y no responden a cerca del ítem que se le está preguntando.

El 28,8% de las respuestas dadas por lo estudiantes se encuentran ubicadas en el nivel básico, lo que indica que los estudiantes manejan el concepto, pero de manera vaga o con poca claridad.

Y el 11,5 % de las respuestas dadas por los estudiantes en la encuesta, se encuentran en el nivel 3 (Alto), indicando así que se encuentran en nivel alto, lo que refiere que el estudiante tiene ideas claras a cerca de la situación que se le propone. Llama la atención como en el nivel 4 (Superior) el

porcentaje es el 0%, indicando esto que ningún estudiante tiene claridad sobre lo que se les indaga y la competencia de proposición es nula.

## 4.2 Análisis del postest

El análisis del postest se realizó con los mismos criterios planteados en el test inicial, es decir teniendo en cuenta los niveles de desempeño propuestos por el MEN en la guía 1290, para cada uno se diseña un criterio de visualización de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba exploratoria.

1. BAJO: El estudiante no tiene idea del ítem por el cual se le está indagando
2. BASICO: El estudiante maneja el concepto, pero de manera vaga, con poca claridad
3. ALTO: El estudiante tiene ideas claras a cerca de la situación que se le propone.
4. SUPERIOR. Además de tener una idea clara a cerca de lo indagado, lo expresa con suficiente claridad y propone otras estrategias.

*Tabla 3.*  
*Respuestas al cuestionario del postest*

PREGUNTA	VALORACIÓN				TOTAL
	1	2	3	4	
	BAJO	BASICO	ALTO	SUPERIOR	
1. ¿Sabes qué es un producto? Explica	0	1	17	8	26
2. ¿En el área de matemáticas te han presentado situaciones problema para darle solución?	0	3	21	2	26



---

En caso de que tu respuesta sea afirmativa, describe ¿qué pasos sigues para darle solución?

3. ¿Has oído hablar de productos notables?, ¿Cómo lo entiendes?

1 3 14 8 26

4. ¿Cuál es el error que se cometió en el siguiente ejercicio?

1 0 25 0 26

$(7a^2 - b^2c) - (-4a - 8b) =$

$-28a^2b^2c - 56a^2b^2c$

A) Se aplica mal la propiedad del producto de potencias de igual base

B) Se aplica mal la propiedad de la potencia de una potencia

C) Se aplica mal la propiedad de la potencia de un producto

D) Se aplica mal el producto de los coeficientes

5. Se denomina expresión algebraica a toda cantidad o conjunto de cantidades representadas por:

2 0 24 0 26

---

---

A) letras solamente sumadas entre sí					
B) números solamente sumadas y restados entre sí					
C) letras y números ligados entre sí, por los signos de las diferentes operaciones					
D) letras y números multiplicados entre sí					
6. Describe cómo hallarías el área del siguiente cuadrado de lado ( $2x+3$ )	0	1	16	9	26
7. Encuentra el área de una puerta cuyas dimensiones son ( $2x +$ $10$ ) ( $2x - 4$ ) =	0	16	10	0	26
8. Describe con tus propias palabras cómo hallarías el área del cuadrado mayor.	0	8	9	9	26
9. Escribe la expresión que corresponde al área sombreada con todos los productos.	0	3	14	9	26
10. Se quiere determinar el área del siguiente terreno. Escribe una	0	11	14	1	26

---

---

expresión algebraica que permita

encontrarla

11. Describe con tus propias palabras ¿cómo hallarías el

volumen de la figura si se conoce

el área de cada parte de ella?

12. Cómo puedes representar la expresión  $(12xy)^3$

13. Realiza los siguientes productos:

a.  $(x + 3)(x - 2) =$

b.  $(b^3 + 9)(b^3 - 2) =$

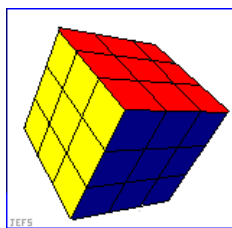
c.  $\left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{3y}\right)^3 =$

d.  $(m^3 - 2n)^2 =$

14. Encuentra una expresión que corresponda al volumen del

siguiente cubo.

$$a + 1$$

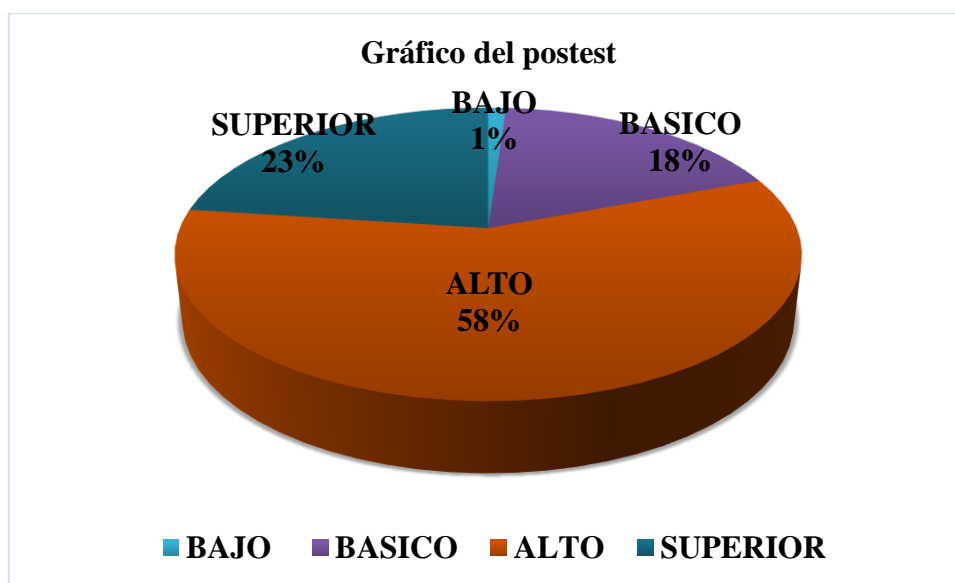


$$a + 1$$

$$a + 1$$


---

TOTAL GENERAL	4	67	210	83	364
---------------	---	----	-----	----	-----



*Ilustración 8. Gráfica análisis del postest*  
*Fuente: Construcción propia*

## Hallazgos

Después de haber aplicado la estrategia planteada y de haber aplicado el mismo test que se había aplicado antes de implementar la estrategia de investigación, se puede concluir que:

Del total de las respuestas el 1,09 % de ellas se encuentran en el nivel 1, lo que indica que este porcentaje no conoce a cerca del ítem que se le está indagando.

El 18,04 % de las respuestas dadas por lo estudiantes se encuentran ubicadas en el nivel básico, lo que indica que el estudiante maneja el concepto, pero de manera vaga o con poca claridad

El 57,69 % de las respuestas dadas por los estudiantes en la encuesta (postest) se encuentran en el nivel 3, indicando así que se encuentran en nivel alto, lo que refiere que el estudiante tiene ideas claras a cerca de la situación que se le propone

El 22,8 % de las respuestas dadas por los estudiantes en el postest, además de tener una idea clara a cerca de lo indagado, lo expresa con suficiente claridad y propone otras estrategias.

### 4.3 Análisis y comparación del pretest y el postest con el Test U de Wilcoxon

Esta prueba no paramétrica compara las medianas de cada una de las preguntas del pretest y el postest con un valor de significancia bilateral  $P < 0.001$ , a continuación, se muestran los estadígrafos que arrojaron la prueba y el análisis de algunas preguntas donde se ven las diferencias significativas de las dos medianas.

#### 4.3.1 Tablas de resumen de cada estadígrafo

*Tabla 4.*  
*Resumen de los resultados*

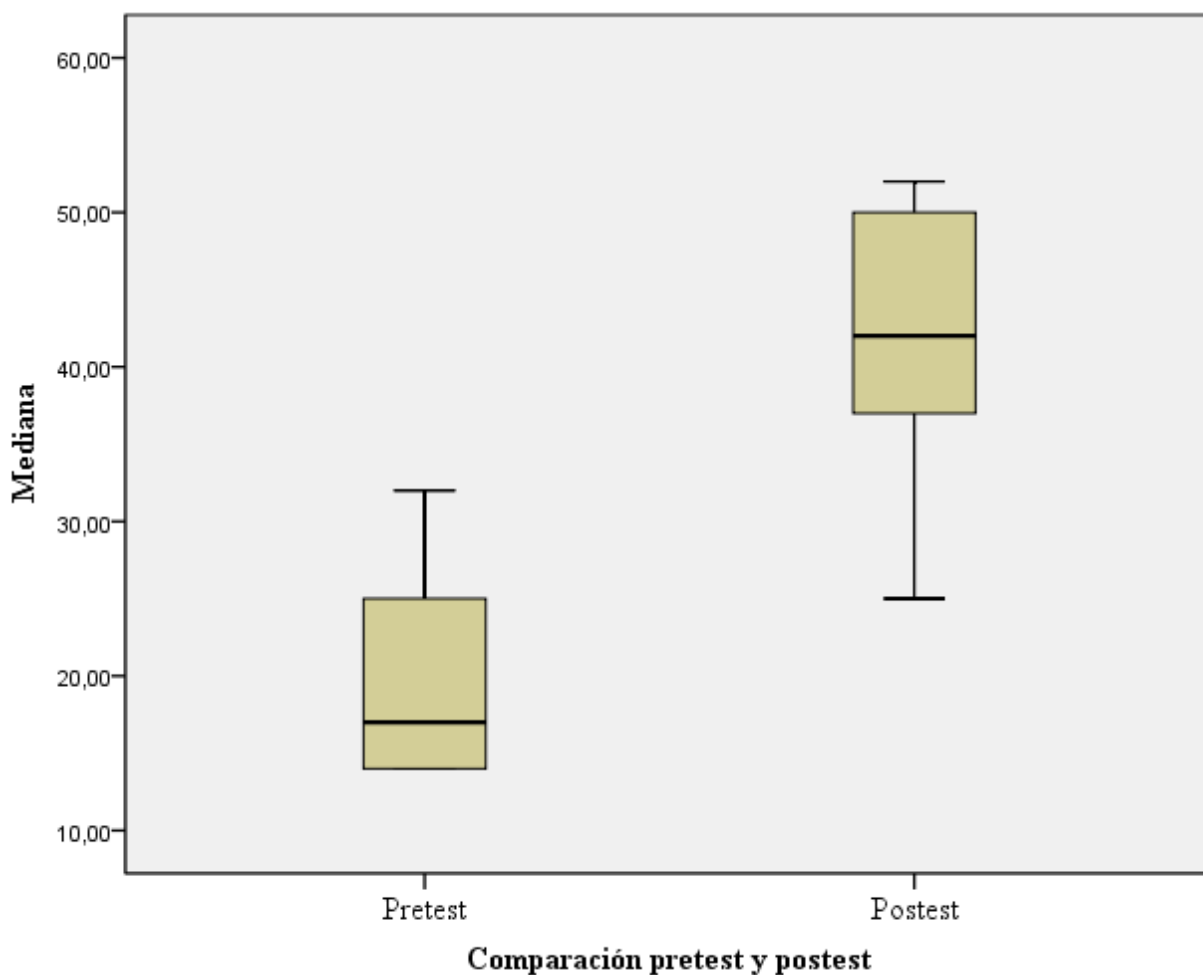
<b>Resumen</b>						
GRUPO	Validez		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcent
Pretest	29	100,0%	0	0,0%	29	100,0%
Postest	26	100,0%	0	0,0%	26	100,0%

*Fuente construcción propia*

Tabla 5.  
Estadígrafos

Estadígrafos				
GRUPO			Estadísticos	Error Std
Pretest	Media		20,0690	1,14247
	95%	Nivel bajo	17,7287	
	Confiabilidad	Nivel alto	22,4092	
	5% Media ponderada		19,7433	
	Mediana		17,0000	
	Varianza		37,852	
	Desviación Std		6,15242	
	Mínimo		14,00	
	Máximo		32,00	
	Rango		18,00	
	Rango Intercuartílico		11,00	
	Simetría		,579	,434
	Curtosis		-1,125	,845
Posttest	Media		42,2692	1,37847
	95%	Nivel bajo	39,4302	
	Confiabilidad	Nivel alto	45,1082	
	5% Media ponderada		42,6368	
	Mediana			
			42,0000	
	Varianza		49,405	
	Desviación Std		7,02884	
	Mínimo		25,00	
	Máximo		52,00	
	Rango		27,00	
	Rango intercuartílico		13,00	
	Simetría		-,485	,456
	Curtosis		-,117	,887

Fuente: Construcción propia



*Ilustración 9 Comparación de las medianas del pretest vs posttest*  
 Fuente: Construcción propia

#### 4.3.2 Hallazgos encontrados al aplicar el Test U de Wilcoxon

En el caso de contar con dos grupos relacionados, como las puntuaciones pretest y posttest de un mismo estudiante, pero que no cumplen los requisitos para aplicar pruebas paramétricas o las variables analizadas son ordinales, el Test U de Wilcoxon es el equivalente no paramétrico. La prueba de Wilcoxon, de la misma forma que las pruebas no paramétricas U de Mann-Whitney y H de Kruskal Wallis también utiliza rangos en lugar de medias para llevar a cabo la comparación.

Las hipótesis a contrastar son las siguientes:

1. Hipótesis Nula: No existen diferencias estadísticamente significativas entre el pretest y posttest de la variable nivel de desempeños [Bajo (1) – Básico (2) – Alto (3) – Superior (4)]
2. Hipótesis Alternativa: Sí existen diferencias estadísticamente significativas entre el pretest y posttest de la variable nivel de desempeños [Bajo (1) – Básico (2) – Alto (3) – Superior (4)]

Las tablas 6 y 7 muestran los resultados del contraste. En la primera se muestran los rangos diferenciados en tres categorías. En primer lugar, los rangos negativos que indican los casos en los que la puntuación del pretest es mayor que la del posttest; en segundo lugar, los rangos positivos indican cuando la puntuación del posttest es mayor a la del pretest; y, finalmente, los empates. En este ejemplo hay 0 rangos negativos, 55 positivos y 0 empates. Por tanto, en ningún caso la puntuación del pretest es mayor que la del posttest;

*Tabla 6.*  
*Rango de niveles de desempeño*

<b>Rangos</b>					
			N	Media de Rangos	Suma de Rangos
Nivel de desempeño Posttest	Rangos negativos		0 <sup>a</sup>	,00	,00
– Nivel de desempeño pretest	rangos positivos		55 <sup>b</sup>	28,00	1540,00
	Empates		0 <sup>c</sup>		
	Total		55		

*a. Nivel de desempeño Posttest < Nivel de desempeño Pretest*

*b. Nivel de desempeño del Posttest > Nivel de desempeño del Pretest*

*c. Nivel de desempeño del Posttest = Nivel de desempeño del Pretest*

*Fuente: Construcción propia*



La siguiente tabla muestra el nivel de significancia bilateral que es el que determina si existen diferencias significativas entre el pretest y el posttest

*Tabla 7.*  
*Diferencias significativas estadísticas*

<b>Test Statistics<sup>a</sup></b>	
	Nivel de desempeño Posttest – Nivel de desempeño pretest
Z	-6,456 <sup>b</sup>
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

*a. Wilcoxon Signed Ranks Test*

*b. Basado en rangos negativos.*

*Fuente: Construcción propia*

Como el valor de probabilidad asociada al estadístico calculado es de 0,000, valor que se encuentra por debajo de 0,05. Esto indica, que debe aceptarse la hipótesis Alternativa pudiéndose afirmar que si existen diferencias significativas entre las puntuaciones de pretest y posttest.

#### **4.4 Análisis de las guías de interaprendizaje**

##### **4.3.1 Análisis de la Guía de interaprendizaje #1.**

El análisis del desarrollo de la guía #1 de los Productos notables (Prueba exploratoria), tenía como objetivo observar el alcance de las competencias planteadas en la guía así:

1. Reconozco el producto de la suma  $(x + a)(x + a)$  y  $(x + a)(x + b)$
2. Realizo productos notables de la forma  $(x + a)(x + a)$  y  $(x + a)(x + b)$
3. Resuelvo problemas sobre productos de la forma  $(x + a)(x + a)$  y  $(x + a)(x + b)$  utilizando representaciones gráficas, algebraicas y escritas.

Para realizar el análisis se hizo la siguiente rúbrica en la que se tiene en cuenta una valoración de 1 a 4 así:

1. BAJO: El estudiante no comprende las situaciones planteadas y no sigue las instrucciones dadas en la guía.
2. BASICO: El estudiante comprende la información con dificultad y presenta la solución de manera vaga o con poca claridad
3. ALTO: El estudiante comprende la información con claridad, hace uso adecuado, sigue las instrucciones de la guía y de la docente y la sabe aplicar usando el programa GeoGebra.
4. SUPERIOR: El estudiante comprende la información con claridad, hace uso adecuado, sigue las instrucciones de la guía y de la docente, la sabe aplicar usando el programa GeoGebra y plantea nuevas estrategias de solución.

*Tabla 8.*  
*Respuestas a la guía de interaprendizaje 1*

SITUACION PLANTEADA	VALORACIÓN				TOTAL
	1	2	3	4	
	BAJO	BASICO	ALTO	SUPERIOR	
1. Soluciona la situación problema planteada comprendiendo y haciendo uso del método Polya	0	13	16	0	29
2. Se familiariza con el programa GeoGebra, realizando las construcciones propuestas en la guía	0	11	18	0	29

---

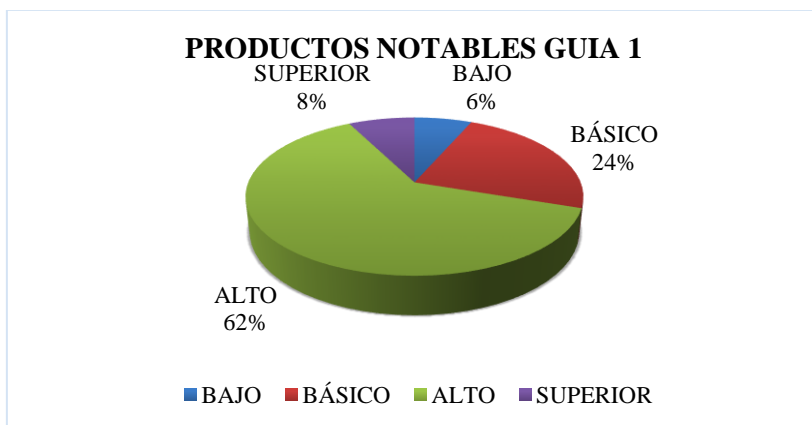
y los realiza de manera gráfica en la guía.					
3. Particulariza lo que ha realizado con alguna ley	7	8	10	4	29
4. Hace uso adecuado del comando CAS (comando factoriza) e identifica criterios en común en las expresiones de salida de la tabla.	0	9	12	8	29
5. Generaliza la suma y la diferencia de cuadrados a partir de una ley deducida a partir de lo trabajado en la guía.	5	14	4	6	29
6. Se familiariza con el producto notable $(x + a)(x + b)$ ; Siendo a diferente de b, con el programa GeoGebra y hace las representaciones gráficas y algebraicas.	0	3	26	0	29
7. Utiliza los 4 pasos del método de resolución de problemas planteados por George Polya para resolver los ejercicios utilizando sólo lápiz y papel.	2	2	25	0	29

---

8. Propone una expresión para un nuevo producto notable y lo relaciona con otro ya trabajado	4	4	19	2	29
9. Resuelve acertadamente otros ejercicios propuestos y los socializa a los compañeros y la docente	0	2	27	0	29
10. Propone ejercicios propios a los compañeros	2	2	23	2	29
<b>TOTAL GENERAL</b>	20	68	180	22	290

*Fuente: Construcción propia*

#### 4.3.1.1 Gráfica de porcentajes de la guía de interaprendizaje 1 y hallazgos



*Ilustración 10. Resultados de la guía #1*

*Fuente: Construcción propia*

#### **Hallazgos:**

El 8% de los estudiantes comprenden la información con claridad, hace uso adecuado de la información que se les da, sigue las instrucciones de la guía y de la docente, la sabe aplicar usando

el programa GeoGebra y plantea nuevas estrategias de solución, este grupo de estudiantes están en el nivel 4 (Superior).

El 62% de los estudiantes comprenden la información con claridad, hace uso adecuado, sigue las instrucciones de la guía y de la docente y la sabe aplicar usando el programa GeoGebra., este grupo de estudiantes están en el nivel 3 (Alto).

El 6% de los estudiantes no comprende las situaciones planteadas y no sigue las instrucciones dadas en la guía, este grupo de estudiantes están en el nivel 2 (Básico).

El 24% de los estudiantes comprenden la información con dificultad y presenta la solución de manera vaga o con poca claridad, a este grupo pertenecen los estudiantes del nivel 1 (Bajo)

#### **4.3.2 Análisis de la Guía de interaprendizaje # 2**

El análisis del desarrollo de la guía # 2 de los Productos notables tenía como objetivo observar el alcance de las competencias planteadas en la guía así:

1. Reconozco el producto de la suma  $(x - a)(x - a)$  y  $(x \pm a)(x \pm b)$
2. Realizo productos notables de la forma  $(x - a)(x - a)$  y  $(x \pm a)(x \pm b)$
3. Resuelvo problemas sobre productos de la forma  $(x - a)(x - a)$  y  $(x \pm a)(x \pm b)$

utilizando representaciones gráficas, algebraicas y escritas.

Para realizar el análisis se hizo la siguiente rúbrica en la que se tiene en cuenta una valoración de 1 a 4 así:

1. BAJO: El estudiante no comprende las situaciones planteadas y no sigue las instrucciones dadas en la guía.

2. BASICO: El estudiante comprende la información con dificultad y presenta la solución de manera vaga o con poca claridad

3. ALTO: El estudiante comprende la información con claridad, hace uso adecuado, sigue las instrucciones de la guía y de la docente y la sabe aplicar usando el programa GeoGebra.

4. SUPERIOR: El estudiante comprende la información con claridad, hace uso adecuado, sigue las instrucciones de la guía y de la docente, la sabe aplicar usando el programa GeoGebra y plantea nuevas estrategias de solución.

*Tabla 9.*  
*Respuestas a la guía de interaprendizaje 2*

SITUACION PLANTEADA	VALORACIÓN				TOTAL
	1	2	3	4	
	BAJO	BASICO	ALTO	SUPERIOR	
1. Soluciona la situación problema planteada recordando los pasos y haciendo uso del método Polya	0	8	21	0	29
2. Usa el programa GeoGebra, realizando las construcciones propuestas en la guía y los	0	12	17	0	29

---

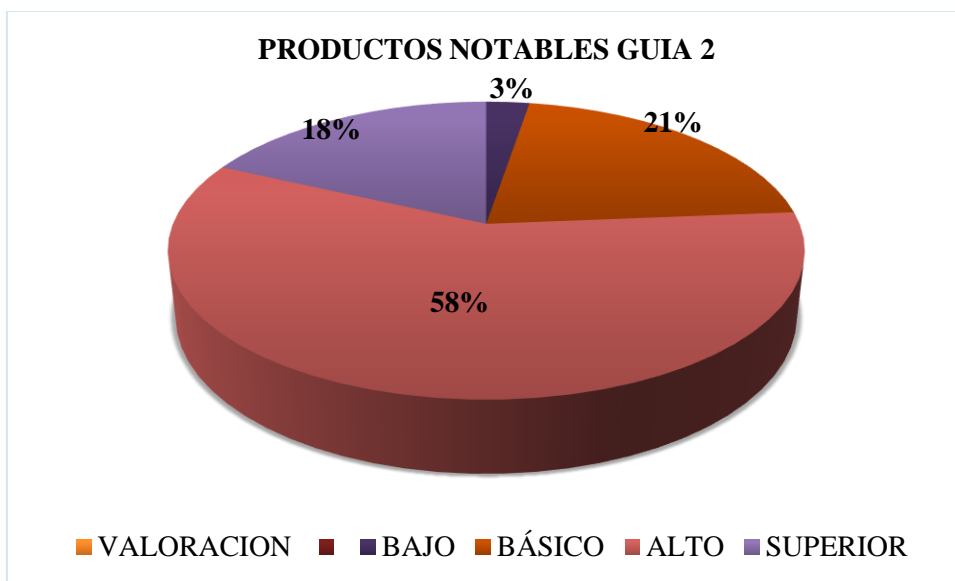
realiza de manera gráfica en la						
guía. ¿Puede escribir alguna ley						
que los generalice?						
3. Usa adecuadamente el						
comando CAS (comando	0	0	4	25	29	
factoriza) para completar la						
actividad propuesta en la guía.						
4. Plantea alguna regla que						
generalice los casos propuestos	2	12	10	5	29	
en la práctica en GeoGebra						
5. Utiliza el programa						
GeoGebra para resolver los	0	6	20	3	29	
productos planteados en la guía						
y realiza las gráficas que						
corresponden a cada uno de						
ellos						
6. Plantea alguna regla que						
generalice los casos propuestos	2	6	18	3	29	
en la práctica en GeoGebra						
7. Resuelve los ejercicios						
planteados y los socializa a sus	0	2	24	3	29	
compañeros y docente.						

---

8. Propone ejercicios de su					
autoría a los compañeros	2	4	20	3	29
TOTAL GENERAL	6	50	134	42	232

*Fuente: Construcción propia*

#### 4.3.1.2 Gráfica de porcentajes de la guía de interaprendizaje 2 y hallazgos



*Ilustración 11. Resultados de la guía 2*

*Fuente: Construcción propia*

#### **Hallazgos:**

EL 18 % de los estudiantes comprenden la información con claridad, hace uso adecuado, sigue las instrucciones de la guía y de la docente, la sabe aplicar usando el programa GeoGebra y plantea nuevas estrategias de solución

El 58 % de los estudiantes comprenden la información con claridad, hace uso adecuado, sigue las instrucciones de la guía y de la docente y la sabe aplicar usando el programa GeoGebra.



El 21 % de los estudiantes no comprende las situaciones planteadas y no sigue las instrucciones dadas en la guía.

El 2,6 % de los estudiantes comprenden la información con dificultad y presenta la solución de manera vaga o con poca claridad

## **Capítulo 5**

### **Conclusiones Y Recomendaciones**

Una vez concluida la presentación de los resultados y expuesto el análisis de los mismos, se realizan las conclusiones relativas a los objetivos específicos de dicho trabajo de investigación.

#### **5.1. Conclusiones por objetivos específicos.**

A continuación, se muestra que se han conseguido en cada uno de los objetivos específicos planteados en el presente proyecto de investigación:

##### **5.1.1 Objetivo específico # 1**

Diagnosticar el nivel de conocimientos que poseen los estudiantes de grado octavo de la institución Educativa Jaime Duque Grisales sobre el conocimiento algebraico de los productos notables.

De acuerdo con los hallazgos del análisis de los resultados se pudo concluir que el 60% de los estudiantes no comprende las situaciones planteadas y no sigue las instrucciones dadas en la guía. El 30% de los estudiantes comprenden la información con dificultad y presenta la solución de manera vaga o con poca claridad. Y el 10 % comprende la información con claridad, hace uso adecuado, sigue las instrucciones de la guía y de la docente y la sabe aplicar usando el programa GeoGebra. Llama la atención como ningún estudiante tiene claridad sobre lo que se le indaga y la competencia de proposición es nula.

Sobre el particular es claro afirmar que el 60% de estudiantes tienen dificultades para comprender, identificar, y realizar operaciones sobre el uso de los productos notables.

##### **5.1.2 Objetivo específico # 2**

Diseñar una propuesta didáctica basada en la resolución de problemas haciendo uso de los registros de representación semiótica para la comprensión de los productos notables de manera significativa.

La presente propuesta de investigación se fundamentó en las teorías de: la Resolución de problemas y los registros de representación semiótica, mediados ambos con el software GeoGebra. Para ello se diseñaron dos guías de interaprendizaje donde se implementaron problemas tipo Polya y se usaron distintos registros de representación de los productos notables, favoreciendo el aprendizaje significativo de estos. Se pudo concluir que el aspecto más relevante tiene que ver con el desarrollo de las guías de interaprendizaje donde los estudiantes mostraron agrado por la forma como se dinamizó la clase, se familiarizaron fácilmente con el programa GeoGebra, además los resultados lo evidencian ya que en la guía # 1 sólo el 3% de los estudiantes se encuentran en el nivel de desempeño 1 (Bajo) y en la guía # 2 sólo un 24% de los estudiantes están también en este nivel. Se evidenció por otra parte el gusto que muestran por el uso de herramientas tecnológicas como el computador. Algunos estudiantes trabajaron con mucha habilidad y se les asignó el rol de monitores, muchos de ellos que habían presentado apatía por el área estuvieron muy motivados trabajando de esta manera y expresaron el gusto y la comprensión de las actividades propuestas, sobre todo porque podían visualizar de manera gráfica el producto notable. Al momento de graficar sólo con lápiz y papel se pudo visualizar una buena asimilación de la práctica hecha en el computador.

### **5.1.3 Objetivo específico # 3**

Mejorar los desempeños de los estudiantes implementando la nueva estrategia didáctica sobre la enseñanza de los productos notables a partir de la resolución de problemas y los múltiples registros de representación semiótica.

De acuerdo con los hallazgos del análisis de los resultados del postest se pudo concluir que sólo el 2,6 % de los estudiantes comprenden la información con dificultad y presenta la solución de manera vaga o con poca claridad, indicando esto que son muy pocos los estudiantes que se encontraron al final del trabajo de campo en el nivel 1 (Bajo: El estudiante no comprende las situaciones planteadas y no sigue las instrucciones dadas en la guía). Por otro lado, los resultados arrojados en las guías de interaprendizaje evidencian el avance que mostraron los estudiantes en el aprendizaje de los productos notables.

#### **5.1.4 Objetivo específico # 4**

Evaluar el impacto de la estrategia didáctica y su incidencia en el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes.

Estas fueron las principales conclusiones que emergieron para dar respuesta al objetivo 4:

1. Un aspecto importante que se pudo visualizar fue la conceptualización y el uso de los pasos de resolución de problemas trabajados en la propuesta, pues los usaron cada vez que debían darle solución a las diferentes situaciones planteadas, tal como afirma Carmona (2017) “cada visualización y manipulación con el software GeoGebra permite ver desde otro registro (Gráfico) como se van viendo invariancias, propiedades y leyes, necesarias para que los estudiantes propongan patrones y conjeturen sobre los posibles resultados (p. 141)
2. Se evidenció gran motivación e interés por parte de algunos estudiantes que siempre habían presentado apatía por el área y les causaba dificultad la comprensión de la temática.

3. El uso de los diferentes registros de representación semiótica, posibilitaron la adecuada conceptualización de los productos notables a partir de la estrategia de resolución de problemas.

4. Uno de los aspectos más importantes fue la adecuada relación que hicieron los estudiantes entre las representaciones de los productos notables con la herramienta tecnológica; su desarrollo algebraico y la representación de ellos con lápiz y papel.

5. Se demostró que se cumplió con el objetivo planteado en la propuesta y se mejoró significativamente el desempeño académico en el área evidenciado en la aplicación y los resultados del postest.

Con el anterior análisis de los cuatro objetivos específicos se pasa entonces a dar respuesta al objetivo general:

#### **5.1.5 Objetivo general**

*Elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de los productos notables a través de la resolución de problemas y los múltiples registros de representación semiótica encaminada a mejorar los desempeños académicos de los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Jaime Duque Grisales.*

Al comienzo del capítulo I se planteó la siguiente pregunta de investigación:

*¿Qué características debe tener un proceso de enseñanza - aprendizaje que contribuya al aprendizaje de los productos notables, haciendo uso del método de resolución de problemas y los múltiples registros de representación semiótica con los estudiantes del grado octavo de la Institución educativa Jaime Duque Grisales del municipio de Villamaría – Caldas?*

Para dar respuesta al objetivo general y ha si se cumplieron las metas es vital por ende que las conclusiones generales de este trabajo de investigación comiencen dando respuesta a ella y poder determinar de manera contundente porque fue útil la implementación de esta propuesta didáctica.

Todo proceso de enseñanza – aprendizaje que tenga inmerso una propuesta didáctica bien sea nueva o alternativa, en este caso se propusieron dos vertientes diferentes pero que no riñen, para fortalecer la enseñanza de los productos notables en estudiantes de grado octavo, la primera denominada los Registros de representación semiótica (RRS) de Duval y la otra la Resolución de Problemas (RP) de Polya. Ambas propuestas fueron importantes por qué:

1. Al hacer uso de los RRS, los estudiantes pudieron ver distintas maneras de ver un mismo objeto matemático desde el contexto de varias representaciones: de forma algebraica, de forma gráfica y a la vez hicieron transformaciones dentro de un mismo registro donde se pueden evidenciar los aprendizajes en los estudiantes.
2. Cada problema se debe ver como una alternativa para aplicar el método de Polya y lograr en los estudiantes la utilización de Heurísticas reflexivas para intervenir de la mejor manera cada situación y darle una solución efectiva.

3. Dentro de los hallazgos se pudieron observar varias situaciones importantes que merecen ser mencionadas:

1. La disciplina y el ambiente de aula mejoraron de manera significativa, pues los estudiantes mostraron gusto e interés por la forma como se dinamizaron las clases en el desarrollo de la propuesta de investigación.

2. Se evidenció agrado por el uso de las herramientas tecnológicas como el computador y los estudiantes se familiarizaron fácilmente con el uso del programa GeoGebra, pues no lo conocían.

## **5.2 Recomendaciones**

Se recomienda orientar las clases de matemáticas haciendo uso de esta estrategia cuando se dé a conocer la temática de productos notables, en los grados octavos de la institución.

Se recomienda dar a conocer la experiencia con los demás docentes del área de matemáticas de la institución y en los colectivos municipales de matemáticas con el fin de compartir experiencias y fortalecer así el proceso de enseñanza- aprendizaje del álgebra

### Lista de referencias

- Baldor, A. (1941). Algebra de Baldor. En A. Baldor, *Algebra de Baldor* (pág. 576). Mexico: Grupo editorial patria.
- Barreto G, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. *NÚMEROS*, 71, 57 - 74. Recuperado el 21 de 10 de 2017, de [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos\\_02.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_02.pdf)
- Barreto García, J. (2014). Dinamización Matemática: Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de educación matemática - UNION*, 115 - 153. Recuperado el 12 de 10 de 2017, de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/38/archivo11.pdf>
- Boscan Mieleles , M., & Klever Montero, K. L. (Julio - Diciembre de 2012). Metodología basada en el método heurístico de polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*, 10(2), 7 -19. Recuperado el 12 de 10 de 2017, de <http://ojs.uac.edu.co/index.php/escenarios/article/viewFile/214/198>
- Carmona Ramírez, L. H. (2017). El uso de GeoGebra para la enseñanza de las identidades trigonométricas, una aproximación desde múltiples representaciones. 3er. Encuentro de Investigación en Educación Matemática EIEM VOLUMEN 2- PARTE 2, págs. 132 - 142. Barranquilla: Universidad del Atlántico. ISSN 2539 - 3219 (En linea)



- Corbalán, F., & Deulofeu, J. (1996). Polya, un clásico en resolución de problemas. *SUMA*, 103 - 107. Recuperado el 12 de 10 de 2017, de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/22/103-107.pdf>
- Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (en castellano 1999 ed.). (P. L. S.A, Ed., & M. V. Restrepo, Trad.) Cali: Artes gráficas Univalle. doi:ISBN:958-8030-23-4
- Explorable. (19 de Noviembre de 2017). *Diseño Cuasi - experimental*. Obtenido de <https://explorable.com/es/disenocuaiexperimental>: <https://explorable.com/es/disenocuaiexperimental>
- García, J. C. (2014). Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática . *Revista iberoamericana de educación matemática*, 115-133.
- Guzñay Guzñay, J. M. (2016). Aplicación de la metodología de resolución de problemas para el aprendizaje de los productos notables, en los estudiantes de noveno año de educación básica, de la unidad educativa "Nación Puruha" en la Comunidad Galte, Provincia de Chimborazo 2016. Chimborazo, Ecuador. Recuperado el 12 de 10 de 2017, de <http://dspace.unach.edu.ec/bitstream/51000/2761/1/UNACH-FCEHT-TG-C.EXAC-20126-000010.pdf>
- Loaiza , M. (2017). Desarrollo de estrategias metacognitivas para la resolución de problemas de ecuaciones de primer grado en alumnos de octavo grado con capacidades educativas diversas. Manizales, Colombia. Recuperado el 2017
- MEN - Ministerio de Educación Nacioanl. (8 de Febrero de 1994). Ley 115. *Ley General de Educación de Colombia*. Santa Fe de Bogotá, Bogotá, Colombia: Gaceta del Congreso.

Recuperado el 11 de 10 de 2017, de [http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-85906\\_archivo\\_pdf.pdf](http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf)

MEN. (12 de 05 de 2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Potenciar el pensamiento matemático: ¡Un reto escolar!*. Santa Fe de Bogota, Bogotá, Colombia.

Recuperado el 12 de 10 de 2017, de [https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)

MEN. (16 de Abril de 2009). Fundamentaciones y orientaciones para la implementación del Decreto 1290 de 2009. *Revolución Educativa Colombia Aprende*. Santa Fe de Bogotá, Bogotá, Colombia. Recuperado el 7 de 11 de 2017, de

[http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-213769\\_archivo\\_pdf\\_evaluacion.pdf](http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-213769_archivo_pdf_evaluacion.pdf)

Socas R, M. M., Camacho M, M., Palarea M, M. M., & Hernández D, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. (L. R. Romero, Ed.) Madrid, Vallehermoso: Síntesis.

Universitat de Valencia. (s.f.). *CONTRASTES DE HIPÓTESIS NO PARAMÉTRICAS*. Obtenido de TEST U DE WILCOXON , MANN Y WHITNEY PARA LA COMPARACIÓN DE DOS MUESTRAS INDEPENDIENTES:

<https://www.uv.es/ceaces/tex1t/7%20no%20para/Mann.htm>

Valencia Cárdenas, M. (2012). Trabajo de Investigación. *Aplicación de la estrategia didáctica de organizadores gráficos en el aprendizaje de productos notables y factorización de los estudiantes del noveno año de Educación General Básica del Colegio Nacional Veracruz del Cantón Pastaza*. Ambato, Ecuador. Recuperado el 10 de 12 de 2017, de <file:///C:/Users/luis/Downloads/Mg.DM.1647.pdf>

## Apéndice

### Apéndice # 1 Pretest y postest



INSTITUCION EDUCATIVA JAIME DUQUE GRISALES  
PRUEBA DIAGNÓSTICO PRODUCTOS NOTABLES



Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

#### PRUEBA EXPLORATORIA

**OBJETIVO:** Indagar acerca de los conocimientos que tienen los estudiantes sobre los conceptos de productos, manejo del lenguaje matemático; indagar a cerca del manejo de material didáctico y tecnológico en el área y de la solución de situaciones problema.

Teniendo en cuenta los conocimientos que has adquirido en los grados anteriores, responde los siguientes ítems.

1. ¿Sabes qué es un producto? Explica

---



---



---

2. ¿En el área de matemáticas te han presentado situaciones problema para darle solución? En caso de que tu respuesta sea afirmativa, describe ¿qué pasos sigues para darle solución?

---



---



---

3. ¿Has oído hablar de los productos notables?, ¿Cómo los entiendes?

---

---

---

4. ¿Cuál es el error que se cometió en el siguiente ejercicio?

$$(7a^2 b^2 c)(-4a - 8b) = -28a^2 b^2 c - 56 a^2 b^2 c$$

- A) Se aplica mal la propiedad del producto de potencias de igual base
- B) Se aplica mal la propiedad de la potencia de una potencia
- C) Se aplica mal la propiedad de la potencia de un producto
- D) Se aplica mal el producto de los coeficientes

5. Se denomina expresión algebraica a toda cantidad o conjunto de cantidades representadas por:

- A) letras solamente sumadas entre sí.
- B) números solamente sumados y restados entre sí.
- C) letras y números ligados entre sí, por los signos de las diferentes operaciones.
- D) letras y números multiplicados entre sí.

6. Describe cómo hallarías el área del siguiente cuadrado de lado  $(2x + 3)$



$$2x + 3$$

---

---

7. Encuentra el área de una puerta cuyas dimensiones son  $(2x + 10)(2x - 4) =$

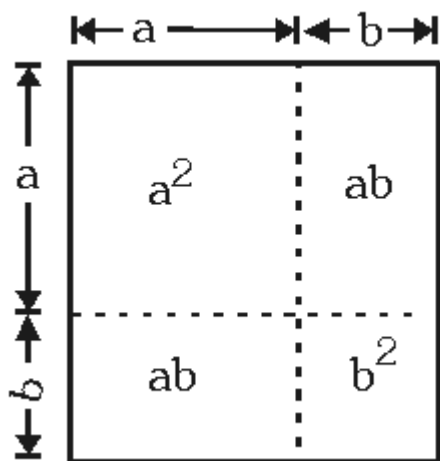
---



---



---



8. Describe con tus propias palabras cómo hallarías el área del cuadrado mayor.

=

---

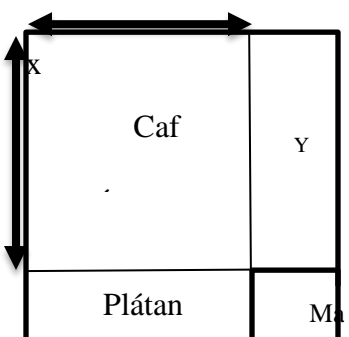


---



---

9. Escribe la expresión que corresponde al área del cuadrado con todos los productos.



9

---



---



---

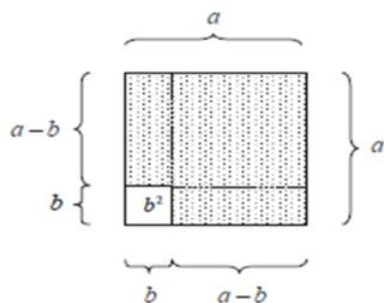


---



---

10. Se quiere determinar el área del siguiente terreno. Escribe una expresión algebraica que permita encontrarla.




---

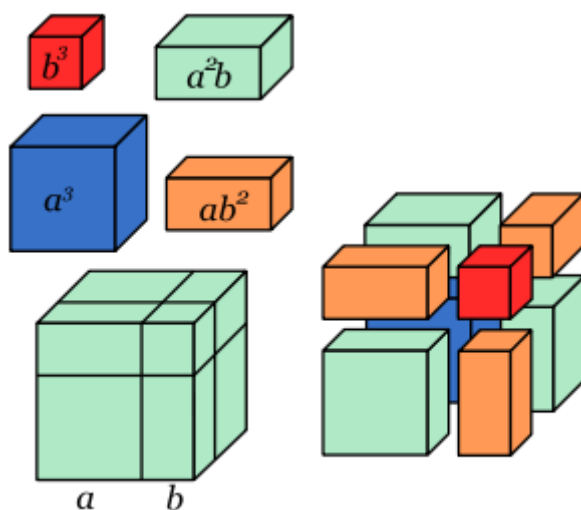
---

---

---

---

11. Cual es el volumen de la figura si se conocen las áreas laterales de cada una de sus partes?




---

---

---

---

---

---

---

12. Cómo puedes representar la expresión  $(12xy)^3$

13. Realiza los siguientes productos:

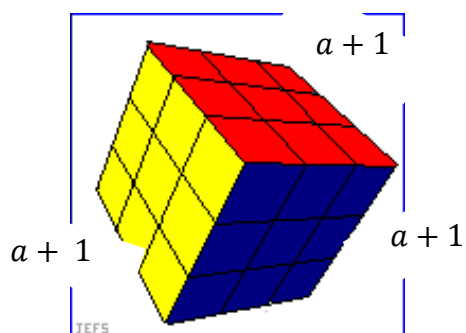
a.  $(x + 3)(x - 2) =$

b.  $(b^3 + 9)(b^3 - 2) =$

c.  $(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y)^3 =$

d.  $(m^3 - 2n)^2 =$

14. Encuentra una expresión que corresponda al volumen del siguiente cubo.



---

---

---

---

---

---

## Apéndice # 2. Guía # 1



### INSTITUCION EDUCATIVA JAIME DUQUE GRISALES GUÍA #1 DE PRODUCTOS NOTABLES

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

#### 1. Declaración de competencias:

- Reconozco el producto de la suma  $(x - a)(x - a)$  y  $(x \pm a)(x \pm b)$
- Realizo productos notables de la forma  $(x - a)(x - a)$  y  $(x \pm a)(x \pm b)$
- Resuelvo problemas sobre productos de la forma  $(x - a)(x - a)$  y  $(x \pm a)(x \pm b)$  utilizando representaciones gráficas, algebraicas y escritas.

#### 2. Secuencia metodológica

- En primer lugar, debes resolver un problema sobre productos notables empleando el método Polya de resolución de problemas
- Luego usarás material concreto para resolver problemas que involucren productos notables
- Debes comunicar las conjeturas que emergen.
- En la parte final debes usar únicamente con lápiz y papel para resolver algunos ejercicios relacionados en la presente secuencia didáctica
- En la fase de socialización, participa en la discusión y hazle saber tus puntos de vista al profesor y a tus compañeros.

#### 3. Diagnóstico

- ¿Conoces que es un producto notable de la forma  $(x - a)(x - a)$  y  $(x \pm a)(x \pm b)$ ?  
SI \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_
- En caso que la respuesta sea afirmativa, utiliza el siguiente espacio para los describas



#### 4. Desarrollo de la secuencia didáctica

*En compañía de tu maestro quien te enseñará el método Polya para resolver un problema, debes darle una solución a la siguiente situación problémica:*

“Si a un cuadrado cuya área mide  $A \text{ m}^2$  se le adiciona a uno de sus lados 9 m y al otro lado se quitan dos metros. ¿Cuál será el área del nuevo polígono? ¿Cómo realizarías la gráfica de este polígono?


1. Entiendo el problema: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?

¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?

2. Concibo un plan: ¿Te has encontrado con un problema semejante? ¿O has visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoces algún problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil?

3. Ejecuto el plan: Al ejecutar tu plan de la solución, comprueba cada uno de los pasos ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?

4. Examino el resultado: ¿Puedes verificar el resultado? ¿Puedes obtener el resultado en forma diferente?

*A continuación, vas a emplear el programa GeoGebra para resolver de forma gráfica y algebraica los siguientes problemas. Para hacerlo debes ingresar al escritorio de tu PC o Tablet y dar clic sobre el ícono  PRODUCTOS NOTABLES 3 Lea detenidamente la parte teórica*

que está al lado derecho de tu pantalla. Resuelve los ejercicios planteados que se encuentran en la pantalla, utilizando los dos registros el gráfico y el algebraico. ¿Puedes escribir alguna ley que los particularice?

Existe un producto muy especial al que se le “llama diferencia de cuadrados”. Ingresa al comando CAS (Recuerda los pasos que se deben realizar para trabajar con el CAS de GeoGebra) y llena la tabla que se propone a continuación

<b>EXPRESIONES DE ENTRADA</b>	<b>EXPRESIONES DE SALIDA</b>
$(x - a)(x + a)$	
$(a - 3)(y + 3)$	
$(z - 1)(z + 1)$	
$(p - \frac{1}{2})(p + \frac{1}{2})$	
$(m + 2)(m - 2)$	

Escribe una regla que particularice los casos.

Utilizando nuevamente el programa GeoGebra resuelve los siguientes productos notables, realiza la gráfica que le corresponde a cada uno de ellos

1.  $(x + 1)(x - 1)$

2.  $(x + 2)(x - 2)$

3.  $(x + 3)(x - 3)$

4. Escriba una fórmula que particularice la diferencia de cuadrados.

### Apéndice # 3. Guía # 2



#### INSTITUCION EDUCATIVA JAIME DUQUE GRISALES GUÍA # 2 DE PRODUCTOS NOTABLES



Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

#### 1. Declaración de competencias:

- Reconozco el producto de la suma  $(x + a)(x + a)$  y  $(x + a)(x + b)$
- Realizo productos notables de la forma  $(x + a)(x + a)$  y  $(x + a)(x + b)$
- Resuelvo problemas sobre productos de la forma  $(x + a)(x + a)$  y  $(x + a)(x + b)$  utilizando representaciones gráficas, algebraicas y escritas.

#### 2. Secuencia metodológica

- En primer lugar, debes resolver un problema sobre productos notables empleando el método Polya de resolución de problemas
- Luego usarás el software de GeoGebra y el comando CAS (Comando Factoriza)
- Debes comunicar las conjeturas que emergen.
- En la parte final debes dejar de usar el GeoGebra para resolver únicamente con lápiz y papel algunos ejercicios relacionados los teoremas involucrados en la presente secuencia didáctica
- En la fase de socialización, participa en la discusión y hazle saber tus puntos de vista al profesor y a tus compañeros.

#### 3. Diagnóstico

c. ¿Conoces que es un producto notable de la forma  $(x + a)(x + a)$  y  $(x + a)(x + b)$ ?

SI \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_

d. En caso que la respuesta sea afirmativa, utiliza el siguiente espacio para los describas.

#### **4. Desarrollo de la secuencia didáctica**

*En compañía de tu maestro quien te enseñará el método Polya para resolver un problema, debes darle una solución a la siguiente situación problémica:*

Don Juan es un carpintero muy reconocido en Villamaría. Uno de sus clientes muy preocupado se le acerca y le pide el favor que le ayude a construir una puerta para la entrada de su casa. Esta puerta tiene una condición especial, deberá llevar en su extremo superior derecho un cuadrado de lados desconocidos no mayores a los lados de toda la puerta que son de 2 metros de ancho por 2 metros de alto. ¿Qué área debe tener dicha puerta? Realiza un dibujo a escala que represente la puerta y en donde se puedan detallar la suma de las áreas interiores de ella.


1. Entiendo el problema: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?

¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?

2. Concibo un plan: ¿Te has encontrado con un problema semejante? ¿O has visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoces algún problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil?

3. Ejecuto el plan: Al ejecutar tu plan de la solución, comprueba cada uno de los pasos ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?

4. Examino el resultado: ¿Puedes verificar el resultado? ¿Puedes obtener el resultado en forma diferente?

*A continuación, vas a emplear el programa GeoGebra para resolver de forma gráfica y algebraica los siguientes problemas. Para hacerlo debes ingresar al escritorio de tu PC o Tablet y dar clic sobre  PRODUCTOS NOTABLES1.ggb el ícono. Lea detenidamente la parte teórica que está al lado derecho de tu pantalla.*

*Construya ahora en el lado izquierdo el cuadrado de lado  $(x + 1)(x + 1)$ . Suma las áreas internas que se forman dentro de dicho cuadrado. ¿Qué resultado obtuvo? No olvide utilizar los cuatro pasos para resolver problemas.*

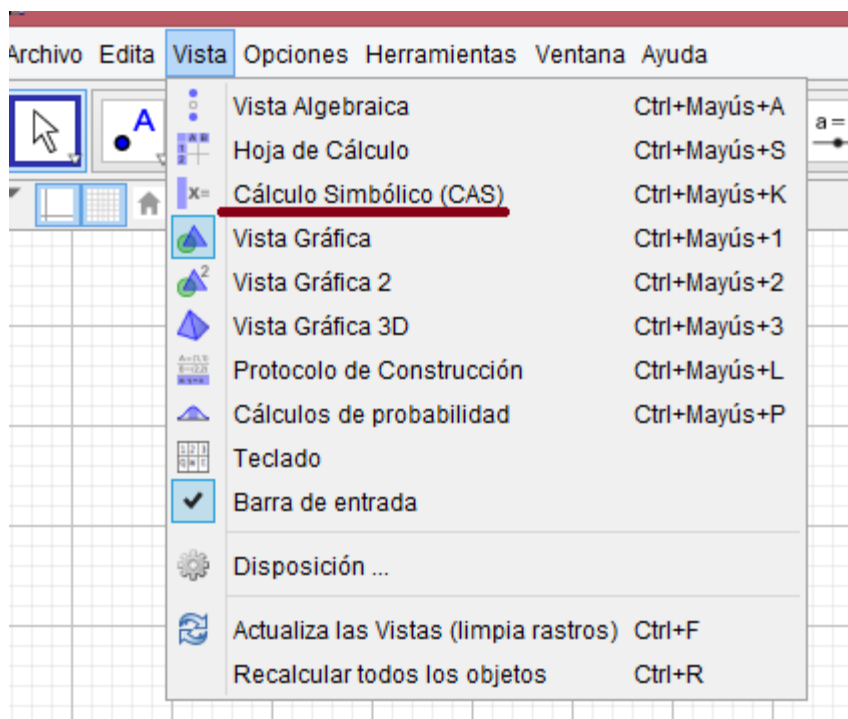
*A continuación, debes realizar los siguientes productos utilizando el software GeoGebra, de sus resultados de forma gráfica y algebraica.*

$$1.(x + 2)(x + 2)$$

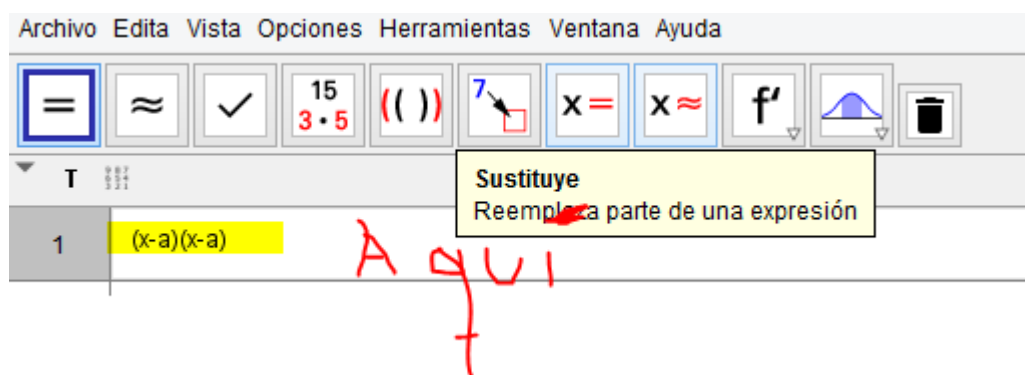
$$2.(x + 3)(x + 3)$$

Puedes escribir alguna ley que los particularice

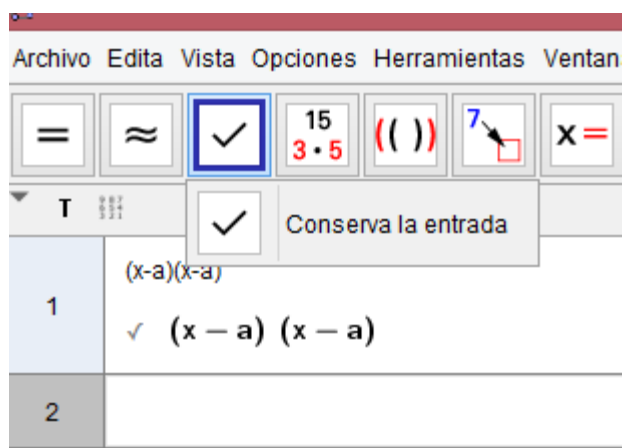
*Te propongo ahora que utilice el comando CAS de geogebra, para ello observa este manual que te explicará cómo utilizarlo*



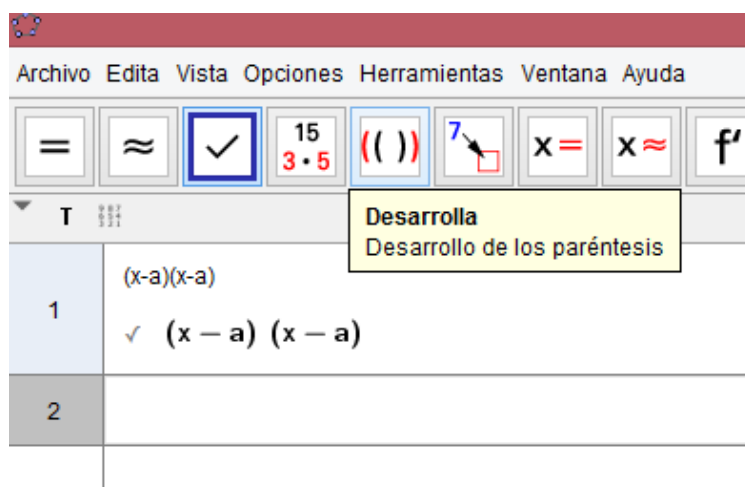
Para resolver problemas con el cálculo simbólico, deberás ingresar la expresión



Posteriormente das clic sobre el ícono en forma de chulo (Conserva la entrada y este de inmediato se transforma en una expresión así:



Deberás luego emplear el comando *desarrolla* que son los dos paréntesis y aparecerá el resultado de la expresión así:



- Después de estar abierto el programa, utiliza el comando CAS para que completes la siguiente tabla.

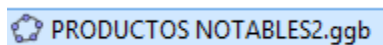
EXPRESIONES DE ENTRADA	EXPRESIONES DE SALIDA
$(x - a)(x - a)$	
$(y - 4)(y - 4)$	
$(z - 2)(z - 2)$	
$(p - 3)(p - 3)$	

$(m - 1)(m - 1)$	
------------------	--

*En el siguiente espacio en blanco escribe todas las cosas que tienen en común las expresiones de entrada de la tabla anterior.*

- ¿Puedes escribir una ley que generalice la suma y la diferencia de cuadrados perfectos?

Existen otros productos notables especiales que su área ya no es un cuadrado sino un rectángulo, estos productos son de la forma  $(x + a)(x + b)$  siendo  $a$  diferente de  $b$ . Ingresa al programa GeoGebra en el escritorio de tu PC o Tablet y da clic sobre el ícono:



Lea cuidadosamente la teoría que se encuentra en el lado derecho de la pantalla.

*Resuelve con la ayuda del programa de forma gráfica y algebraica los siguientes productos:*

1.  $(x + 1)(x + 2)$

2.  $(x + 2)(x + 3)$

No olvides utilizar la regla de los cuatro pasos de Polya para resolver problemas.

¿Puedes inferir alguna regla para resolver estos productos? Nárralo con tus palabras.

*Ahora vamos a utilizar el comando CAS para resolver los siguientes problemas*

<b>EXPRESIONES DE ENTRADA</b>	<b>EXPRESIONES DE SALIDA</b>
$(x - a)(x - b)$	
$(y - 3)(y - 4)$	



$(z - 1)(z + 2)$	
$(p + 3)(p - 1)$	
$(m + 1)(m - 2)$	

Escribe una regla que particularice los casos.

*Ahora vas a resolver los siguientes ejercicios utilizando sólo papel y lápiz y el método Polya.*

*Pide ayuda a tu profesor cuando lo necesites.*

1.  $(2x + 3)(2x + 3)$ . Escribe el resultado, gráfica y algebraicamente.

2.  $(ax + b)(x + c)$ . ¿Qué expresión resultará? ¿Se parece este producto notable a otro de los que ya conoces?

*Resuelve los siguientes ejercicios y socialízalos con tus compañeros y docente.*

$$(y - 4)(y - 2)$$

$$(x + 4)(y - 2)$$

$$(z - 1)(z - 2)$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Propone tres ejercicios de tu autoría a tus compañeros.

## Apéndice # 4. Objetos virtuales de aprendizaje construidos con GeoGebra

← → ↻ Es seguro | <https://www.geogebra.org/m/YuVg9GCt>

← GeoGebra >

### Los Productos Notables

1. Producto Notable de la forma  $(x+a)(x+a)$
2. Producto notable de la forma  $(x+a)(x+b)$
3. Trinomio de la forma  $(x-a)^2$  y  $(x-a)(x-b)$

Claudia Liberos, 19/11/2017

En este libro puedes encontrar una manera divertida de enseñar a sus estudiantes como se pueden resolver los productos notables con el uso del álgebra geométrica





1. Producto Notable de la form...
2. Producto notable de la form...
3. Trinomio de la forma  $(x-a)^2$ ...

Dirección electrónica donde se encuentran alojados

<https://www.geogebra.org/m/YuVg9GCt>

## Apéndice # 5. Registros fotográficos

